De las fichas de colores al Álgebra

Representar un problema es el primer paso para su posible solución

Diversos niveles de representación gráfica, aritmética, lingüística y algebraica

Rocío González

Niveles de representación en la resolución de problemas matemáticos

Cuando tenemos un problema matemático lo principal para resolverlo es poder realizar una representación de los elementos y las relaciones que intervienen en él. Cuando éstas se han representado tenemos un acceso directo hacia la forma de resolución. Tanto la representación como la estrategia de resolución pueden tener diferentes niveles de abstracción, que van desde los elementos de la realidad concreta de los problemas hasta los procedimientos algebraicos.

La representación

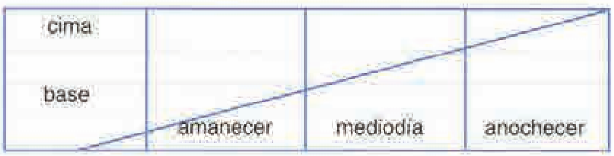
Representar un problema como acceso a su comprensión ha sido motivo de muchos estudios dentro de la psicología y la pedagogía.

Tomemos como ejemplo el siguiente, atribuido a Duncker (psicólogo de la Gestalt):

Un monje comenzó a escalar una montaña al amanecer. Llegó al templo que estaba en la cima al ponerse el sol y meditó toda la noche. Al amanecer del día siguiente bajó la montaña siguiendo el mismo camino, pero yendo más rápido, por supuesto. Cuando llegó abajo afirmó: "Hay un punto en este camino por el cual he pasado exactamente al mismo tiempo en mi camino ascendente y en mi camino descendente". ¿Puedes probar que el monje estaba en lo cierto?

Le sugiero que trate de resolver este problema, que, aunque no es numérico, corresponde al campo de las matemáticas.

Algunos maestros lo han resuelto agregando datos al problema. Suponen que sale a las 6 de la mañana y suponen también que llega a la cima a las 7 de la tarde. Dibujan una gráfica con la subida de tamaño imaginario y dibujan marcas para indicar el paso del tiempo en la subida y en la bajada.



Se puede resolver también marcando valores genéricos de tiempo y señalando el camino.

Hay una tercera forma que simplifica radicalmente el problema haciéndole una transformación equivalente, pero más sencilla de imaginar.

Suponga que hay dos monjes. Uno en la cima y otro al pie de la montaña. Ambos empiezan a recorrer el camino al mismo tiempo, pero uno sube y el otro baja. ¿Se encontrarán?

Otro ejemplo que ilustra la idea de la representación de problemas es la leyenda acerca del famoso matemático Gauss cuando tenía 10 años.

Imagine usted a un tradicional maestro que piensa que debe forzar al trabajo excesivo y repetitivo a los alumnos por su propio bien, y el pequeño Gauss como uno de sus alumnos. Esta mañana les ha pedido que sumen los números del 1 al 100, de manera que la suma sea como sigue: **1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... 100**

Este es el problema que nos plantea **la realidad.**

El maestro esperaba que con esta tarea tendría ocupados a los alumnos durante bastante tiempo, pero al cabo de pocos momentos, el pequeño Gauss tenía ya la respuesta correcta.

¿Cómo lo hizo?

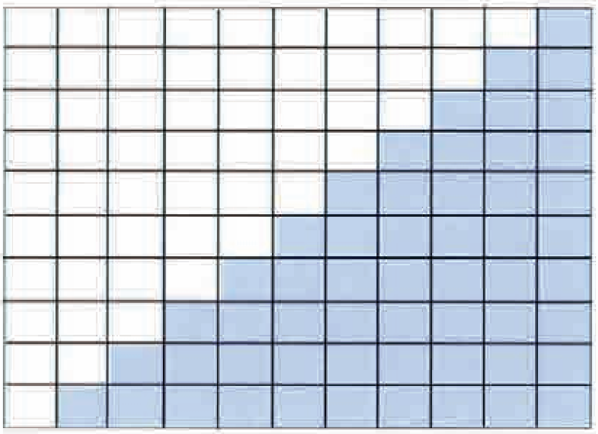
Le sugiero que trate de averiguarlo y le daré algunas pistas:

Trate de resolver el problema solamente con números hasta el 10: **1+2+3+4+5+6+7+8+9+10**

—¿Qué pasa si suma los números de los extremos hacia el centro? **(1+10,2+9...)**

—Represente la suma como cuadros en escalera: De 10, de 9, de 8... Si completa lo que falta para formar un rectángulo con la escalera.

¿Cómo es la parte que se agrega?



En esta **representación gráfica** podemos observar que se forman dos escaleras iguales pero invertidas. El total de cuadros es el doble que nuestra respuesta.

Esta idea puede ser representada por números. La base de la figura tiene 11 cuadros, de los 10 de nuestro problema más uno.

La altura es 10, que representa el número de sumandos de nuestro problema. Podemos obtener el total de cuadros y luego dividir en dos, para tener nuestra respuesta.

La **representación aritmética** del cálculo sería:

$$11 \times 10 / 2$$

Los procesos de generalización

Usted ha observado una relación que permite facilitar el trabajo. Pero es importante ver cuál es su campo de aplicación a otras sumas y no sólo del 1 al 10.

Si mi suma es del 1 al 20 o del 1 al 40 ¿Qué procedimiento puedo seguir? Analicemos las operaciones que se hicieron con la suma hasta 10, para tratar de obtener la regla que nos permita generalizar

$$11 \times 10 / 2$$

El once es en realidad el número hasta el que vamos a sumar más uno.

10 es el número de sumandos.

La multiplicación de ambos nos da el doble del resultado que queremos.

Al dividirlo entre dos, lo obtenemos.

Esto lo podemos escribir de manera general sustituyendo los números por las palabras que nos indican a qué se refieren los números, en relación a nuestro problema original.

El resultado es igual al número mayor más uno, por número mayor entre dos.

Aquí estamos dando una regla general en un **nivel lingüístico.**

Como es muy largo anotarlo, podemos reducir este texto supliendo algunas palabras con signos aritméticos.

$$\text{resultado} = \frac{\text{número mayor} + 1 \times \text{número mayor}}{2}$$

Aún podemos reducir esta escritura utilizando un sólo signo (como puede ser una inicial) la palabra 'número mayor'.

$$R = \frac{N = 1 \times N}{2}$$

Estamos representando la misma regla utilizando un nivel **algebraico.**

Podemos suponer que hay una dificultad en la representación del problema, ya que se ha optado por una idea mecánica, frecuentemente observada por los maestros: si son muchos números se suman.

I. Aprende mates jugando con pipo (3-10 años)

Si la cuestión es ayudar a codificar y descodificar la realidad en estructuras matemáticas,éste es uno de los múltiples recursos existentes para aprender matemáticas jugando con los números, pesos, medidas, colores, secuencias y figuras geométricas. Desde el menú de inicio se accede a:

1. Operaciones matemáticas básicas.
2. Tablas de multiplicar.
3. Progresos: juegos de habilidad (con barcos, helicópteros, aviones, etc.) para practicar las operaciones básicas.
4. Juegos gráficos (puzzles de colores)
5. Pesos y medidas.
6. Juegos lógicos y
7. La máquina inteligente.

Ventajas: que tienen bastantes niveles progresivos (adaptables desde los 3-4 hasta los 10 años), hay variedad y los juegos son entretenidos. Fomentan, además, el desarrollo del razonamiento lógico y matemático.

Mejorable: la música, las instrucciones del protagonista Pipo y la ayuda, ayuda poco.

Se puede acudir a diferentes niveles de representación que permitan al alumno entender el problema:

*1. **OBJETOS REALES.*** Tomar 8 caramelos, 5 chocolates y 3 refrescos y colocar su precio, o bien, el dinero correspondiente a cada uno.

*2. **OBJETOS SUSTITUTOS.*** Con fichas de colores, recortes u otros objetos representar los dulces y colocar su precio.

*3. **REPRESENTACIÓN GRÁFICA.*** Pedir al alumno que dibuje los objetos comprados y escribir el precio de cada uno.

Al realizar cualquiera de estas representaciones se le permite al alumno entender el problema y plantearse una estrategia.

Es importante señalar que este problema tiene una secuencia en el tiempo: compra, paga y le dan cambio. Es un problema de ESCENAS.

- En la primera escena, compra cierto número de cosas con un valor determinado. Son los datos iniciales del problema.
- En la segunda escena, paga el total.
- En la tercera, entrega un billete de cien y le devuelven el cambio.

A los alumnos les ayuda representar en un dibujo las tres escenas, dentro de tres recuadros consecutivos.

Cualquiera de estas representaciones implica ya una traducción del texto original y se han tomado solamente los datos necesarios para resolver el problema.

Enseguida se requiere otra traducción, a nivel aritmético, que recoge las líneas de solución del problema, utilizando números y signos.

Para generalizar es necesario resolver varios problemas similares, de manera que el alumno pueda explicar en qué se parecen, tanto en los datos como en el procedimiento.

¿Qué le parece utilizar un formato general creado a partir del problema, como el siguiente? Joaquín ahora puede llamarse diferente, y en lugar de dulces pueden comprarse otras cosas.

Los niveles de representación del problema

En este ejemplo hemos caminado desde el nivel del problema de la realidad hasta la representación algebraica, siguiendo la siguiente ruta:

REALIDAD: situaciones y objetos como punto de partida del problema.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA: dibujos, esquemas u otros elementos representativos.

REPRESENTACIÓN ARITMÉTICA: operaciones aritméticas.

REPRESENTACIÓN LINGÜÍSTICA: reglas generales dichas en lenguaje cotidiano.

REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA: reglas generales traducidas a letras y signos aritméticos.

Para resolver un problema matemático, en realidad pasamos por una serie de traducciones, y, en cada una de ellas, se pierden datos concretos y se gana generalidad. Los tres primeros niveles se refieren a objetos individuales del mundo, y los dos siguientes a ideas generalizadas. Estas ideas generalizadas son las que pueden ser transferidas a otros problemas similares, e incluso, a partir de ellas generar nuevas formas de resolución aún más amplias.

En algunos casos, sobre todo en los primeros niveles educativos, hay un nivel posterior a la realidad y previo a la representación gráfica que resulta de impor-

II. La magia de las matemáticas: El Diablo de los números (10 en adelante)

¿Y si las matemáticas tuvieran muy poco que ver con las cuentas y las calculadoras y fueran más bien juego y poesía?

De entre los muchos libros de juegos matemáticos, tal vez éste (además del marketing y la publicidad que lo han acompañado) destaque por la forma en que se relata. No sabemos si tiene más valor literario que el propio contenido. H. M. Enzensberger ha querido volver soñando al país de las maravillas, al mundo de Sofía. Robert viaja a través de sus sueños (12 sueños, 12 noches... o 12 pesadillas) y se encuentra con explicaciones tan curiosas como ésta sobre el valor del cero:

No sé calcular —afirmó Robert.

Absurdo

$$1 - 1 =$$

—Uno menos uno es cero —dijo Robert—. Está claro.

—¿Ves? Sin el cero no es posible.

—Pero ¿para qué hemos de escribirlo? Si no queda nada, tampoco hace falta escribir nada. ¿Par qué un número aposta para algo que no existe?

$$1 - 2 =$$

—Uno menos dos es menos uno.

—Correcto. Sólo que... sin el cero, tu serie numérica tiene el siguiente aspecto:

$$\ldots\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ -1,\ -1,\ -3,\ -4 \ldots$$

—La diferencia entre 3 y 2 es uno, entre 2 y 1 otra vez uno, ¿y entre 1 y -1?

—Dos —aseguró Robert.

—Así que tiene que haberte comido un número entre 1 y -1.

—¡El maldito cero! —exclamó Robert.

—Ya te he dicho que sin él las cosas no funcionan. Los pobres romanos también creían que no les hacía falta el cero. Por eso no podían escribir sencillamente 1986, sino que tenían que andar atormentándose con sus M y C y L y X y V.

tancia, y es el uso de objetos sustitutos. Es cuando el niño, para realizar una suma de flores utiliza palitos o canicas, que son objetos concretos pero distintos al original.

Una aplicación concreta a los problemas aritméticos escolares

En las escuelas solemos dar a los alumnos el texto del problema. El alumno lo lee y resuelve.

Con frecuencia es difícil para ellos seleccionar la información, organizarla en un representación de datos y relaciones y traducirla a operaciones aritméticas.

¿Qué hacer cuando el alumno no sabe qué operaciones debe realizar, o ha sumado todos los datos, sin entender qué se le pide?

Veamos el siguiente ejemplo

El sábado va a ser el cumpleaños de Joaquín y compró dulces para su fiesta.
Compró 8 caramelos de 80 ptas.,
5 chocolates de 100 ptas. y
3 refrescos de 140 ptas.
Si llevaba 2.000 ptas. ¿Cuánto le sobró?

Una forma equivocada en que muchos alumnos resuelven el problema es sumando todos los números: $8 + 4 + 5 + 5 + 3 + 7 + 100$.

El sábado va a ser el cumpleaños de Joaquín y compró ______________ para su fiesta.
Compró 8 ________ de 80 ptas.,
5 ________ de 100 ptas. y
3 ________ de 140 ptas.
Si llevaba 2.000 ptas. ¿Cuánto le sobró?

También podemos optar por mantener los nombres y variar las cantidades y los precios.

El sábado va a ser el cumpleaños de Joaquín y compró ______________ para su fiesta.
Compró ___ caramelos de ____ ptas.,
___ chocolates de ____ ptas. y
___ refrescos de _____ ptas.
Si llevaba __________ ptas. ¿Cuánto le sobró?

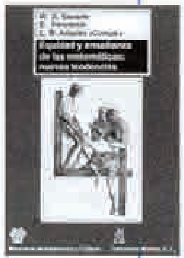
Con estos formatos estamos trabajando problemas tipo tienda, que le permiten al alumno generalizar y también reconocer tipos de problemas, con los que forma esquemas de conocimiento que le facilitarán reconocer y resolver problemas de este tipo cuando se representen.

También se puede aplicar esta idea a problemas de perímetro, de área, de distancia, tiempo y otros.

¿Cuál es la finalidad de estas traducciones?

Básicamente, permitir la representación de problemas y acceder a niveles de mayor generalidad y abstracción, que en último caso, permiten entender mejor el mundo y facilitar nuestro trabajo. ■

... y III ¿Representamos todos por igual? (profesores y educadores)



¿Tiene algo que ver las matemáticas y las representaciones con los los contextos culturales de los propios alumnos? Parece que los símbolos no se aprenden como abstracciones, sino como formas de representar situaciones que los niños ya comprenden. Para entender los procesos intuitivos de resolución de problemas que emplean los niños, es necesario comprender las distintas situaciones problemáticas que caracterizan las cuatro operaciones. Por ejemplo:

1. *Keisha tenía 12 cuentas. Le dio 8 a Imani. ¿Cuántas tiene ahora Keisha?*
2. *Keisha tenía 8 cuentas. Imani le dio algunas más y ahora tiene 12. ¿Cuántas cuentas le dio Imani?*
3. *Keisha tenía algunas cuentas. Imani le dio 8 más y ahora tiene 12. ¿Cuántas cuentas tenía Keisha al principio?*
4. *Keisha tiene 12 cuentas. Se pone 4 cuentas en cada trenza. ¿En cuántas tenzas lleva cuentas?*

¿Se puede fomentar la equidad o una educación matemática culturalmente relevante? ¿Cómo construir y conectar las matemáticas con la vida cotidiana?

Cada viaje en el autobús urbano cuesta 1,50$. Un "pase" mensual para todas las líneas cuesta 65 $. ¿Qué es más económico para ir a trabajar, el billete simple o el pase? Los jóvenes blancos, de clase media y residentes en las afueras indicaron que el billete univiaje era más barato (a 1,5 $ por viaje, un trabajador pagaría 3 $ al día, durante aproximadamente 20 días al mes, haría un total de 60$). En cambio, muchos jóvenes negros que vivían en el centro de la ciudad decían que no tenían información suficiente. Por ejemplo: "¿A cuántos viajes nos referimos? Su propia experiencia les decía que, con frecuencia, las personas tenían varios empleos, mal pagados, con dedicación total o parcial, con el fin de juntar suficientes ingresos para vivir. Por tanto, es posible que un trabajador necesite tomar el autobús varias veces al día para acudir a sus diversos empleos. Además la mayoría de la gente que conocían, cogían el autobús porque tenían coche y lo utilizaban también para ir de compras, al cine, a la iglesia, etc. (Si hiciéramos esta misma pregunta en Madrid a chicos inmigrantes que viven en el distrito centro y los que viven en los barrios residenciales de las afueras, posiblemente las respuestas serían similares).

Estas son algunas de las reflexiones y de los trabajos de campo que aborda este libro, destinado a todos aquellos que quieran salirse de los meros procedimientos matemáticos, los cálculos algebráicos y las antiguas formas de ver la cuestión.