

APRENDER Y ENSEÑAR matemáticas

ÁNGEL DE LA LLAVE CANOSA

Profesor del IES "Cardenal Cisneros" (Madrid)

allave@madrid.uned.es

Las matemáticas no son sólo un conjunto de conocimientos que se aprenden y se utilizan, sino también son un estilo de pensamiento y una estética. Una mezcla peculiar de imaginación y rigor; de sentido práctico y de idealismo; de técnica y de arte. Pero quizá, la característica más sorprendente de la matemática, como disciplina intelectual, sea la enorme variedad de los problemas que aborda; y no podemos dejar de maravillarnos de que estén relacionados de una manera significativa.

¿QUÉ MATEMÁTICAS ENSEÑAR Y CÓMO HACERLO?

La naturaleza misma de las matemáticas, hace que su didáctica sea una cuestión crucial. En la enseñanza de las matemáticas el *cómo* y el *cuándo* es tan importante o más que el *qué*. La asimilación auténtica de las matemáticas depende sobre todo de cómo se hacen y se utilizan en una variedad de contextos. Alan H. Schoenfeld ha acuñado el término de *inculturación* para designar la forma de asimilación del conocimiento matemático, que implica sobre todo imbuirse de hábitos que favorezcan las actitudes matemáticas. Una buena enseñanza debe ofrecer a los alumnos la vivencia de variadas experiencias matemáticas.

Una de las grandes ideas en la didáctica de las matemáticas es la que se conoce como *Problem solving*, que pone el énfasis en los procesos mentales más que en los contenidos. Este enfoque está encabezado por el matemático húngaro George Polya. Él emplea el término *heurística* para referirse al proceso como algo distinto del contenido. Son muchos los grandes matemáticos, como Hadamard, Poincaré, Hardy, Klein..., que han utilizado la introspección para descubrir las claves de los mecanismos mentales del pensamiento matemático. Leyendo sus testimonios se puede aprender mucho sobre heurística.

Otro personaje de referencia indispensable en la didáctica de las matemáticas es la profesora Emma Castelnuovo, que tiene el mérito de haber incorporado a la didáctica de las matemáticas las grandes ideas de pedagogos como Comenius, Pestalozzi y María Montessori. Ella nos ha mostrado con multitud de ejemplos, la importancia de la observación, la intuición de los sentidos y nos ha señalado el *recurso a la acción* como la herramienta más eficaz para adquirir los conceptos matemáticos. Su propuesta didáctica la podemos resumir en una enseñanza sensible, cíclica y activa de las matemáticas.

La naturaleza misma de las matemáticas, hace que su didáctica sea una cuestión crucial. En la enseñanza de las matemáticas el cómo y el cuándo es tan importante o más que el qué.



Decálogo de la didáctica matemática media

Decálogo de la didáctica matemática media de Pedro Puig Adam

Se me piden normas didácticas. Preferiría despertar una conciencia didáctica; sugerir formas de sentir antes que modos de hacer. Sin embargo por si resultan de interés, ahí van las sugerencias que estimo fundamentales:

- I.- No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.
- II.- No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.
- III.- Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.
- IV.- Guardar cuidadosamente los planos de abstracción.
- V.- Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.
- VI.- Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.
- VII.- Promover en todo lo posible la autocorrección.
- VIII.- Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.
- IX.- Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.
- X.- Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento.

EL DECÁLOGO DE LA ENSEÑANZA MEDIA DE LAS MATEMÁTICAS

Pocas personas, como Pedro Puig Adam han sido tan clarividentes para exponer con reglas sencillas y prácticas las ideas más profundas de la didáctica de las matemáticas. Su memorable *Decálogo de la didáctica de la matemática media* es una guía segura para cualquier profesor de matemáticas.

LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

El Informe a la UNESCO de la “Comisión Internacional sobre la Educación para el siglo XXI”, el conocido como *Informe Delors*, “La educación encierra un tesoro”, señala a los sistemas de formación el objetivo de que todos los ciudadanos desarrollen las competencias necesarias para la formación a lo largo de toda la vida, de manera que puedan afrontar los desafíos de la sociedad del siglo XXI. El concepto de *competencia* supera la dimensión de las disciplinas tradicionales. De alguna manera incorpora a los planteamientos académicos los objetivos últimos de la educación básica. Este concepto ha tenido un gran desarrollo en los últimos años, especialmente por la influencia de potentes organismos internacionales como el proyecto PISA, de la OCDE.

Didáctica de las Matemáticas



George Polya



Emma Castelnuovo



Julio César de Mello
(Malba Tahan)



Pedro Puig Adam

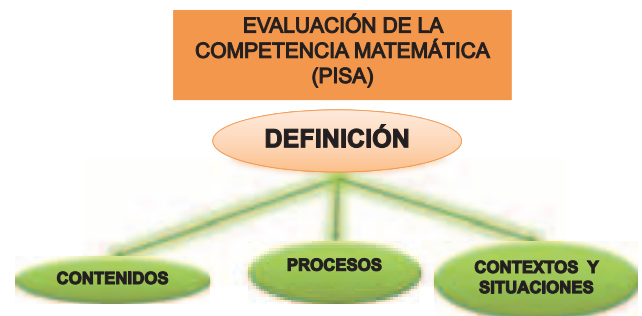


Miguel de Guzmán



Claudi Alsina

Figura 1. Evaluación de la competencia matemática



La ley Orgánica de Educación introduce las competencias básicas en la definición del currículo y el decreto de desarrollo incluye entre los contenidos de la materia de matemáticas un bloque común relacionado con procesos y contextos matemáticos.

PISA, *Programme for International Student Assessment* (Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos), es un estudio comparativo, internacional y periódico del rendimiento educativo de los alumnos de 15 años. El objeto de la evaluación son ciertas competencias consideradas clave: la competencia lectora, la matemática y la científica. Estas competencias son evaluadas cada tres años. En cada aplicación se estudian los rendimientos de los alumnos en las tres competencias clave, pero una de ellas, de forma rotatoria, recibe una atención más profunda. El primer estudio PISA, que se realizó en el año 2000, tuvo como competencia principal la comprensión lectora. PISA 2003 se centró en las matemáticas, PISA 2006 en las ciencias y PISA 2009 de nuevo en la lectura.

Los planteamientos de PISA nos abren nuevas reflexiones sobre la didáctica de las matemáticas básicas y merece la pena conocerlos. Para evaluar la competencia matemática se tiene en consideración: a) contenidos, b) procesos y c) contextos y situaciones.

Lo que da más valor a PISA es que evalúa los sistemas educativos en su conjunto y pone en relación los resultados con parámetros como las características de los alumnos y de sus familias, de los centros, la metodología pedagógica, y la organización del sistema. Esto es lo que permite detectar dificultades y descubrir estrategias de mejora. Muchas de las reflexiones que haremos más adelante tienen su origen en el Informe PISA 2003.

George Polya, escribió *Los diez mandamientos del profesor*. Es un resumen magistral de las cualidades que debe reunir un buen profesor de matemáticas. Se presentan aquí para que cada profesor de matemáticas haga una introspección respecto a su situación en relación con estos “diez mandamientos”

Los diez mandamientos del profesor (según G. Polya)

1. Demuestre interés por su materia.
2. Domine su materia. Si un tema no le interesa personalmente, no lo enseñe, porque no será Vd. capaz de enseñarlo adecuadamente.
3. Sea instruido en las vías del conocimiento: el mejor medio para aprender algo es descubrirlo por sí mismo.
4. Trate de leer en el rostro de sus estudiantes, intente adivinar sus esperanzas y sus dificultades; póngase en su lugar.
5. No les deis únicamente «saber», sino «saber hacer», actitudes intelectuales, el hábito de un trabajo metódico.
6. Enseñadles a conjeturar. Primero imaginar, después probar.
7. Enseñadles a demostrar. «Las matemáticas son una buena escuela de razonamiento demostrativo».
8. En el problema que estéis tratando, distinguid lo que puede servir, más tarde, para resolver otros problemas.
9. No reveléis de pronto toda la solución; dejad que los estudiantes hagan suposiciones, dejadles descubrir por sí mismos siempre que sea posible.
10. No inculquéis por la fuerza, sugerid.

LA PREOCUPANTE SITUACIÓN ACTUAL

En la Unión Europea y Estados Unidos se ha detectado en las últimas décadas un alarmante descenso del interés de los jóvenes por seguir estudios de matemáticas y, como consecuencia, también de los relacionados con ciencia y tecnología. Esta situación es muy preocupante porque a medio plazo se pone en serio peligro el desarrollo económico. De hecho uno de los famosos objetivos de la Unión Europea de la estrategia de Lisboa 2000 era aumentar de manera significativa el número de graduados en matemáticas. Esta situación de los países occidentales es especialmente llamativa si se compara con la pujanza de los estudios de matemáticas en los países asiáticos.

Muchos testimonios personales y estudios empíricos confirman la importancia que tiene el factor emocional en el aprendizaje de las matemáticas.

EL AMBIENTE SOCIAL JUEGA EN CONTRA

A juicio de algunos analistas las claves para explicar la decadencia de los estudios de matemáticas y de ciencias y tecnología en los países occidentales hay que buscarla en un ambiente global de la sociedad, lo que pone a la didáctica y a las escuelas en el compromiso de hacer un esfuerzo añadido para remar contracorriente.

Cada vez más padecemos la obsesión por el rendimiento, la productividad y la ganancia inmediata. Por desgracia el sistema escolar y muchos profesores están cayendo también en esta dinámica aberrante. A las escuelas y a los alumnos se les lanza el mensaje de que deben orientar su actividad sólo para sacar buenas notas en el examen de mañana. Así las dificultades se esquivan, se buscan atajos. La curiosidad, la originalidad y la capacidad para abrirse a nuevos planteamientos se resienten.

En nuestra sociedad, acostumbrada al constante zapeo, se está llegando a la incapacidad para observar pausadamente, para la meditación concentrada y es excepcional la tenacidad para perseguir una solución que se resiste.

Por otra parte, es difícil que los jóvenes se sientan orientados hacia las matemáticas si éstas no se valoran socialmente. No se debería presumir “es que yo soy de letras” o juzgar “¿esto para qué sirve?”.

EL FACTOR EMOCIONAL

Cuando yo era novato en la profesión, en los primeros años ochenta, asistí a un curso para profesores con el título “*La enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas*”. Los ponentes eran del Grupo Cero, un colectivo de profesores innovadores de Valencia, muy activos en aquella época. Al comienzo de la sesión el ponente nos repartió una lista de cinco problemas, aparentemente difíciles, mientras daba las siguientes instrucciones con un tono muy distante: “*Tienen ustedes media hora para resolverlos. Mientras están trabajando yo observaré quienes tienen más dificultades. Luego, les sacaré a la pizarra para analizar sus respuestas*”. Se creó un grandísimo malestar en la sala. Cuando ya algunos estaban a punto de irse, el ponente aclaró, con una gran sonrisa:

Actividades de aula

Podría resultar interesante pedir a los alumnos que escriban en un documento lo que ven de positivo a las matemáticas, sus miedos y temores respecto a esta asignatura, así como dónde están sus principales problemas. Una vez recogida y analizada la información se comenta con los estudiantes, desdramatizando en aquellos aspectos que sean más negativos desde el punto de vista afectivo, animando a los alumnos con más dificultades y presentando el lado más atractivo de la materia. También debe servir para que el propio profesor se haga consciente de lo que piensan sus alumnos y de dónde encuentran ellos las dificultades.

Caminando juntos

Para debatir padres y maestros

1. Bloqueos en matemáticas: ¿Cuál es la actitud de mis hijos/alumnos hacia las matemáticas? ¿Presentan bloqueos? ¿Sufren ansiedad matemática? ¿Qué estrategias podría utilizar para superarlos?
2. ¿Mis hijos/alumnos saben organizar autónomamente su estudio de matemáticas? ¿Saben estudiar matemáticas? ¿Cómo puedo ayudarles a que aprendan matemáticas por sí mismos y disfruten haciéndolo?
3. Los alumnos necesitan *vitaminas matemáticas*. ¿Aprovechamos las ocasiones habituales para hacerles ver las matemáticas que nos rodean? ¿Somos capaces de plantearnos problemas matemáticos? ¿Usamos argumentos cuantitativos que involucren matemáticas?
4. ¿Cuál debería ser la formación de los profesores de matemáticas? ¿Qué incentivos necesitan? ¿Qué apoyos?

“Creo que ahora comprenderéis porqué muchos alumnos no aprenden matemáticas”. La sesión continuó de una manera completamente diferente a como había empezado.

Muchos testimonios personales y estudios empíricos confirman la importancia que tiene el factor emocional en el aprendizaje de las matemáticas. Incluso se ha llegado a caracterizar un síndrome conocido como *ansiedad matemática*. El informe PISA 2003 cuando relaciona los resultados obtenidos en matemáticas con el índice de ansiedad, se confirma que éste es un factor determinante en el rendimiento, por encima de otros. Aunque el hecho de que los chicos experimenten menos ansiedad que las chicas y que los estudiantes manifiesten menos ansiedad en unos países que en otros, sugiere que éste es un problema que puede abordarse con éxito cambiando de método. Así pues, gran parte del trabajo de los padres, los profesores y del sistema escolar es intentar que los alumnos bloqueados ante las matemáticas rompan esta limitación y se interesen auténticamente por aprender y disfruten haciéndolo.

LA CAPACIDAD PARA ORGANIZAR EL PROPIO APRENDIZAJE

Una de las conclusiones de los PISA es que la capacidad para organizar con autonomía el propio aprendizaje es un factor clave para la adquisición de las competencias matemáticas y el éxito escolar. Este aspecto debería ser prioritario en la planificación de un proceso formativo. Muchos alumnos no estudian matemáticas simplemente porque no saben cómo hacerlo. No se tiene la paciencia suficiente para dar pautas, revisar trabajos, ofrecer guías y apoyos. Hay que dar opción a que los alumnos averigüen por sí mismos que la laboriosidad y el intento tenaz de resolver un problema una y otra vez puede ser fructífero y gratificante. Un ambiente ordenado y una metodología bien pensada y sistemática es determinante para ello.

LOS GRUPOS INTERACTIVOS Y LOS PROGRAMAS DE APOYO ESCOLAR

No cabe caer en el conformismo de que haya alumnos que no aprendan matemáticas. Tenemos que buscar estrategias de *éxito para todos*. Siempre hay que estar preparando un plan B. Toda la literatura empírica, entre otros los informes PISA, nos enseñan que las políticas de selección de alumnos y de repeticiones no mejoran los resultados y tienen efectos nocivos sobre la motivación y las expectativas de los alumnos, sin contar los daños que se causa a la cohesión social. Por el contrario, hay experiencias que han resultado muy eficaces para combinar la equidad y la excelencia. Una opción interesante es la utilización de *Grupos interactivos*. Técnica que proviene del movimiento de las Escuelas Aceleradas. Esta técnica consiste en formar, en algunos momentos del curso, grupos de trabajo heterogéneos animados por un monitor que estimule el aprendizaje cooperativo. De las medidas de *éxito para todos*, la más extendida es la utilización de *mentores* de apoyo fuera del horario escolar. El objetivo de estos programas, tipo PROA, es apoyar de una manera cercana al alumno que se encuentra en dificultades de partida o carece de hábitos y condiciones para organizar su propio aprendizaje. En la actualidad un tema que hay que explorar es el papel que puede jugar la incorporación de las TIC a la mejora de la educación matemática.

No entendía nada; odiaba las matemáticas, hasta que tuve un profesor que hizo que me gustasen y ... todo cambió.

HACEN FALTA BUENOS PROFESORES

Muchos testimonios nos señalan la importancia de los profesores: “No entendía nada; odiaba las matemáticas, hasta que tuve un profesor que hizo que me gustasen y ... todo cambió.” “Me enamoré de las matemáticas gracias a un profesor que nos entusiasmaba con sus historias.”. Como decía María Montessori, los niños imitan a las personas que quieren. El afecto y la personalidad son las mejores herramientas que tienen los educadores en la mano. De ahí la importancia de contar con buenos, buenísimos, profesores, motivados y entusiastas.

Algunos autores señalan que uno de los factores que contribuyen a hacer a las matemáticas poco atractivas es que con frecuencia las clases adquieren tonos autoritarios. Tal vez es así por tradición, porque las aulas están masificadas, por la falta de tiempo para desarrollar los programas y quizá, en algún caso, por el deseo de los profesores de parecer brillantes ante sus alumnos. Rotundamente: el autoritarismo es la peor de las estrategias.

Figura 2. Encuesta sobre matemáticas

| Lo que más me gusta de las matemáticas es... | Lo que menos me gusta de las matemáticas es... | Lo que más trabajo me cuesta en la asignatura de matemáticas es... | Creo que las matemáticas son útiles para... | Necesitaría más ayuda en... |
|--|--|--|---|-----------------------------|
| 1: <input type="text"/> | 1: <input type="text"/> | 1: <input type="text"/> | 1: <input type="text"/> | 1: <input type="text"/> |
| 2: <input type="text"/> | 2: <input type="text"/> | 2: <input type="text"/> | 2: <input type="text"/> | 2: <input type="text"/> |
| 3: <input type="text"/> | 3: <input type="text"/> | 3: <input type="text"/> | 3: <input type="text"/> | 3: <input type="text"/> |
| 4: <input type="text"/> | 4: <input type="text"/> | 4: <input type="text"/> | 4: <input type="text"/> | 4: <input type="text"/> |
| 5: <input type="text"/> | 5: <input type="text"/> | 5: <input type="text"/> | 5: <input type="text"/> | 5: <input type="text"/> |

En mi vida diaria, las matemáticas son útiles para:

CONCLUSIÓN

Como conclusión, los profesores, las familias y el sistema escolar tienen que esforzarse por habituar a los alumnos a organizar autónomamente sus procesos de aprendizaje, apoyar al que lo necesita con afecto, tener paciencia y, de vez en cuando, dar un suplemento de *vitaminas matemáticas*.

El farolero de “El principito” apagaba y encendía el farol frenéticamente cada minuto, porque esa era la consigna. A los educadores nos vendría bien dedicar tiempo sosegado a replantear nuestro trabajo. Como decía José Ortega y Gasset, “que lo urgente no nos impida la pasión por lo importante.” ■

Para saber más

- MALBA TAHAN (2008). *El hombre que calculaba*. Barcelona: RBA Bolsillo.
- ALSINA, C. (2008). *Vitaminas matemática*. Barcelona: Ariel.
- COURANT, R. & ROBBINS, H. (2002). *¿Qué es la Matemática?*. Méjico: Fondo de Cultura Económica.
- CASTELNUOVO, E. (2004). *Ideas de matemáticas*. Madrid: Monografías de SUMA



Horizontes de la familia ante el S. XXI

Reflexiones con motivo del XXV aniversario del Instituto Universitario de la Familia

Ana Berástegui y Blanca Gómez (coords.)
 ISBN: 978-84-8468-342-1
 376 págs.; 17 x 24 cm; 19,00 euros

En los últimos 25 años, los investigadores y profesionales que trabajan con familias han asistido a enormes cambios en la vida de las familias españolas. En este libro se ofrece al lector una reflexión interdisciplinar, actualizada e interesada en la aplicación práctica del conocimiento, acerca de cómo se han ido desarrollando estos cambios, tratando de responder a algunas preguntas fundamentales: ¿Cuáles son los grandes retos que se presentan a las familias hoy en día? ¿Cómo se puede ayudar más y mejor a la familia a superar con éxito estos retos? ¿Cuál es el horizonte de la familia en este nuevo siglo?