POR UNA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS más significativa

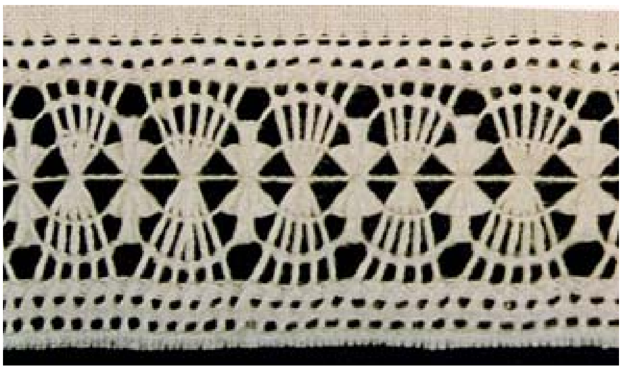
Luis Balbuena Castellano
Catedrático de Matemáticas de Enseñanza Secundaria
balbuenaluisx@gmail.com

> Una de las razones que se suele apuntar como origen del fracaso es el grado de abstracción que se utiliza en las explicaciones. Generalmente se aprende matemáticas para hacer más matemáticas y se deja de lado el que también sirven para explicar e interpretar lo que vemos o lo que sucede en nuestro entorno cotidiano.

Que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tienen problemas no es nada nuevo. Los estudiantes lo saben y el profesorado mejor aún. Tampoco es de ahora ni desde la publicación de los resultados de los test que se han hecho en los últimos años. Quizá por eso, porque ha sido y sigue siendo una fuente de preocupación es por lo que el profesorado de matemáticas ha promovido la creación de sociedades de profesionales que tienen, entre otros, el objetivo de tratar de resolver esos problemas. No es tarea fácil, pues de haberlo sido, ya estaría resuelto teniendo en cuenta que hay sociedades, como en EE.UU., que tienen más de un siglo. En nuestro país, las primeras sociedades de este tipo (Canarias, Andalucía, Aragón, etc.) aparecieron a finales de la década de los 70 del siglo pasado. Hoy se cuenta con una activa Federación que continúa en esa labor sin desfallecer.

Es evidente que estamos ante un problema muy complejo y con muchos filos. Una de las razones que se suele apuntar como origen del fracaso es el grado de abstracción que se utiliza en las explicaciones. Generalmente se aprende matemáticas para hacer más matemáticas y se deja de lado el que también sirven para explicar e interpretar lo que vemos o lo que sucede en nuestro entorno cotidiano. Y, desde luego, es una pena que haya elementos tan bellos como los que se presentan en las imágenes que reproduzco, elementos que pueden ser interpretados matemáticamente y que, la mayoría de las personas que han pasado por aulas de matemáticas, no lo sepan apreciar. Por eso indico que debemos tender a una enseñanza de las matemáticas que sea lo más significativa posible. Y quiero dejar claro que no propongo el "bandazo", es decir, que se abandonen los conceptos que requieran de ese esfuerzo de abstracción tan importante en el aprendizaje de esta disciplina. Más bien al contrario, soy partidario de dar a conocer esas ideas en la enseñanza obligatoria porque es también una pena que los ciudadanos que abandonan las matemáticas tras su enseñanza obligatoria no lleguen a captar la potencia de su capacidad de razonamiento penetrando en esos conceptos. Pero esto me desvía de lo que quiero expresar en este trabajo.

El año 2000, que fue el de las matemáticas, Dolores de la Coba García y yo presentamos al Premio *Giner de los Ríos* un trabajo dedicado a poner de relieve las



Calado (EL Escobonal, Tenerife)

matemáticas de los calados canarios. Lo habíamos preparado con un grupo de estudiantes del instituto Viera y Clavijo de La Laguna (Tenerife). Nuestro objetivo se centró en conseguir el mayor número de modelos de calados para estudiarlos desde la óptica de la Geometría. Nos dieron el primer premio. Caja Canarias tomó la feliz iniciativa de hacer una publicación con el contenido del premio.

Pues bien, hay algunas preguntas que voy a enunciar y que trataré de responder: las matemáticas necesarias para interpretar geométricamente estos materiales, ¿están al alcance de los estudiantes de la etapa obligatoria? Si y, además, están en la programación oficial. Lo que suele ocurrir es que, cuando se explican, se utilizan ejemplos abstractos que raramente el estudiante después los identifica en los materiales cotidianos. Esa es, además, una situación que se repite con frecuencia. En ocasiones explicamos conceptos (especialmente de geometría) usando el clásico método de dibujar la figura en la pizarra e indicar que eso es, por ejemplo, un segmento circular o una hipérbola pero en raras ocasiones les hacemos ver que esas figuras están en la fachada de un edificio de la ciudad o sobre la mesa de noche cuando se va a acostar.

¿Es complicada la matemática que permite interpretar ese material? No, aunque debo matizar que aunque la explicación se hace de forma rigurosa y sencilla en los niveles elementales, sin embargo, se puede profundizar en el tema hasta llegar a límites universitarios.

La Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas tiene una exposición titulada *Calados y Matemáticas* que es instalada en centros culturales y educativos. Consta de calados reales enmarcados en cuadros y elaborados por caladoras que conocimos durante la realización del trabajo y de unos carteles explicativos. La presentación a los estudiantes va acompañada de un taller previo en el que se explican las matemáticas que van a encontrar en las muestras de calados de la exposición y, posteriormente, se visita con un cuestionario que deben responder por equipos en el transcurso de la visita.

Estimo que la clásica metodología que utilizamos la mayoría del profesorado debería complementarse con otras como por ejemplo los talleres. Si se preparan los materiales necesarios y se procura no dejar nada a la improvisación, los talleres permiten acercarse a las matemáticas de una forma mucho más significativa y activa por parte del alumnado.

A continuación vamos a ver, de una manera sucinta, lo que se explica a los estudiantes que visitan la exposición en este taller previo que he citado y que, obviamente, se puede llevar al aula sin dificultad.

El taller comienza tras la presentación de imágenes de elementos cotidianos que responden al mismo modelo geométrico de los calados (celosías, rejas, llantas de coches, parchwork, cruces, etc.) y se insiste en la presencia de regularidades (es decir, de repeticiones) que son las que se van a estudiar.

La observación de los calados nos induce a pensar que se trata de una figura (que llamaremos "módulo") que parece como si se moviera a lo largo de una recta sin deformarse, es decir, conservando siempre la misma métrica. Pero al llegar a las esquinas, las caladoras, en lugar de prolongar una de las bandas, resuelven el problema colocando un rosetón.

De este modo nos encontramos que los calados están compuestos por dos elementos que pueden ser estudiados matemáticamente: los frisos y los rosetones.

Para que los alumnos puedan disfrutar y asimilar mejor la visita a la exposición, es importante que previamente se hayan explicado y trabajado en el taller estos elementos matemáticos.

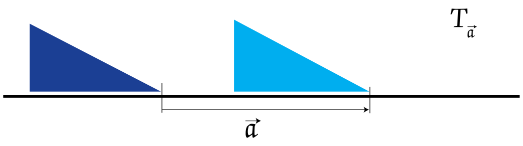
Alumnos realizando el taller previo a la exposición Calados (La Cuesta, Tenerife).

Los frisos

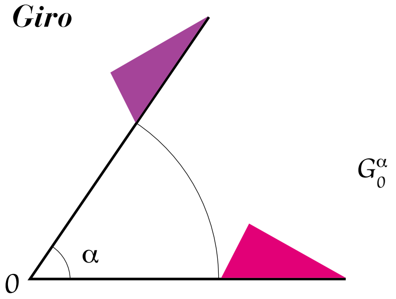
Para analizar los frisos comenzamos estudiando los movimientos que conservan la métrica de la figura, es decir, las *isometrías*.

¿Cuáles son los movimientos isométricos del plano? Pues estos cuatro:

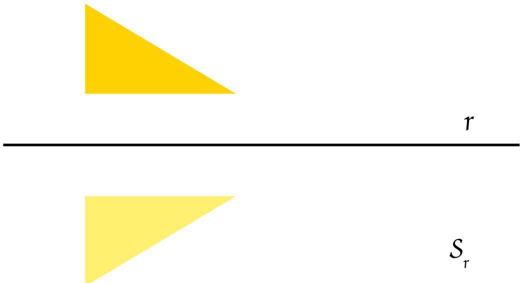
Traslación



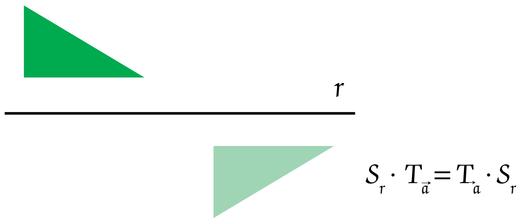
Giro



Simetría Axial

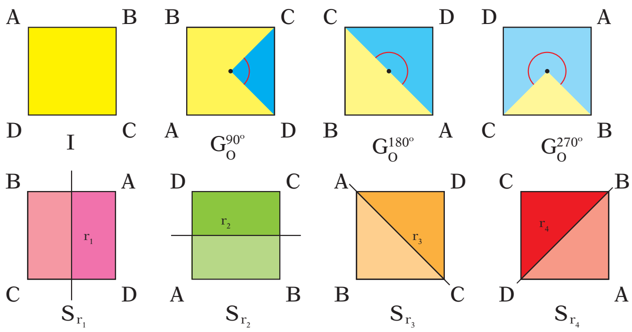


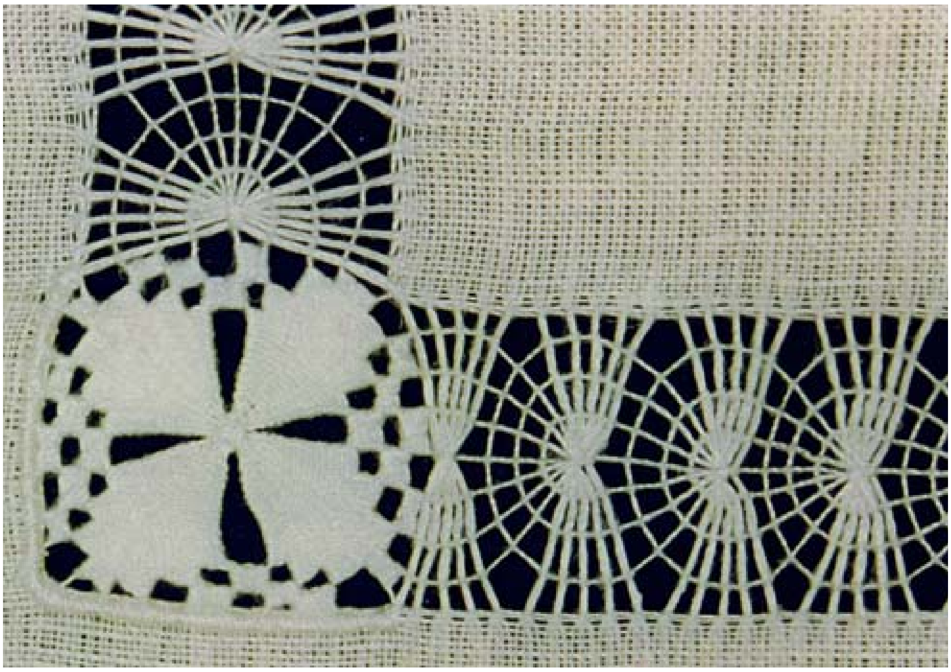
Simetría con desplazamiento



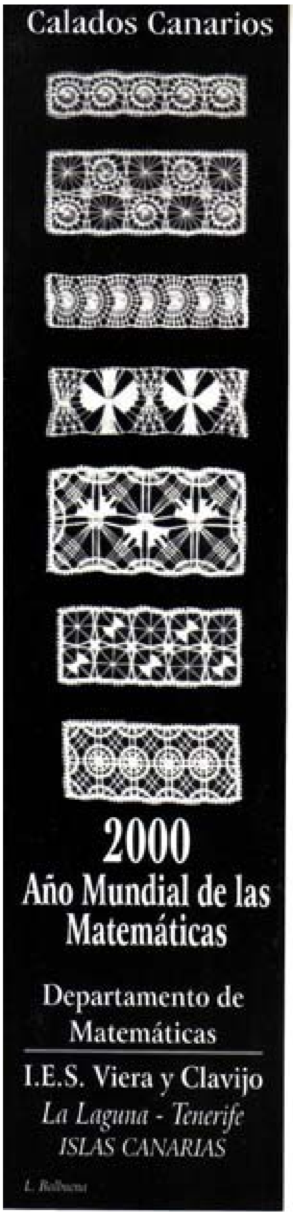
Por otra parte, ese mismo módulo puede ser sometido a otros movimientos que reciben el nombre de "isomorfismos" (igual forma), que como indica su nombre, una vez realizados, dejan a la figura con la misma forma que tenía antes de hacerlo, aunque los puntos hayan cambiado de sitio. Es lo que le pasa, por ejemplo, a un cuadrado cuando se gira un ángulo de 90° siendo el centro de giro el centro del cuadrado. ¿Tiene más isomorfismos el cuadrado? Sí y sin mucho esfuerzo se consigue que el alumnado los vaya descubriendo hasta llegar a los ocho que son.

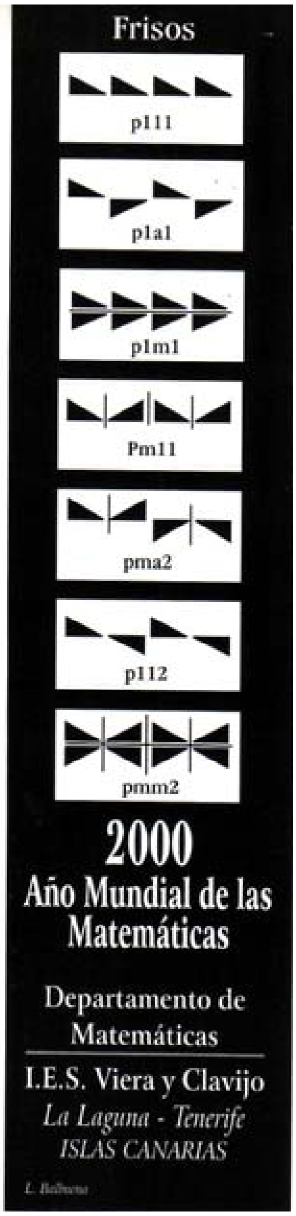
Los ocho isomorfismos de un cuadrado





El rosetón resuelve la esquina.





Si en vez de un cuadrado consideramos un rectángulo, compruébese que tiene cuatro isomorfismos. ¿Y el triángulo equilátero? ¿Habrá alguna figura que solo tenga como isomorfismo la identidad, esto es, el giro de 360°?

Una vez entendidos estos dos conceptos, podemos pasar a la construcción de los frisos que son, como veremos, los que nos van a permitir hacer una clasificación matemática de los calados (y, lógicamente, de todos los elementos que tienen la misma característica de la regularidad como en rejas, celosías, etcétera).

> las matemáticas, necesarias para interpretar geométricamente la realidad que nos rodea, están al alcance de los estudiantes de la enseñanza obligatoria y además, están en la programación oficial.

Lo primero que debemos hacer es dar la definición de friso:

> *Es una banda, generalmente rectangular, que contiene una figura que se repite por traslación a lo largo de una recta.*

Es evidente que eso, precisamente, es un calado.

Y llegamos a la gran pregunta: ¿cuántos frisos hay?

A esta pregunta los estudiantes dan todo tipo de respuestas y quedan muy sorprendidos cuando se les dice que son solo siete. En el taller utiliza un Power Point animado para presentar uno a uno los siete tipos de frisos que existen.

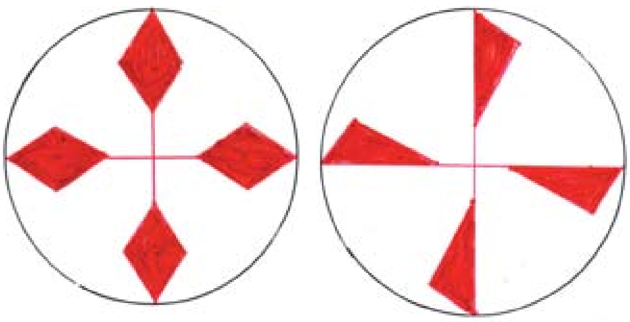
En el marcalibros que preparamos el Año Mundial de las Matemáticas están todos sintetizados y con un ejemplo de calado que va respondiendo a cada uno de los frisos. Una vez conocidos los frisos, hicimos la clasificación de todos los modelos de calados que encontramos y, además, a partir de ese momento los alumnos podrán clasificar cualquier friso que vean.

Los rosetones

Para analizar los rosetones en el taller, se comienza mostrando la enorme cantidad de ellos que están en nuestro entorno cotidiano, entre los que se encuentran las bellísimas ventanas circulares de las iglesias góticas o las llantas de los coches.

¿Qué es un rosetón? Matemáticamente se puede dar una definición parecida a la de friso, solo que en este caso el módulo no se traslada sino que se gira, es decir, se trata de un círculo en el que hay un sector circular (que llamaremos pétalo) que se va repitiendo mediante giros del mismo número de grados. Con esta definición ya podemos tener una clasificación sencilla de los rosetones: según el número de pétalos que tenga. Así, por ejemplo, si tiene cuatro pétalos, bastará con girar 90° para tener la misma forma.

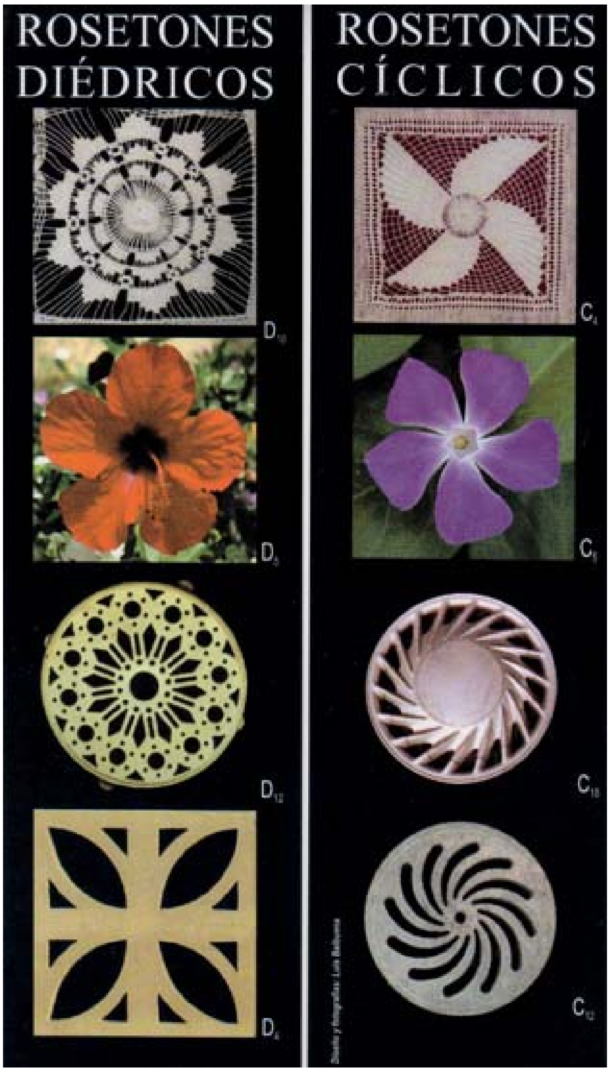
Pero fijemos la atención en la forma de los pétalos. Los hay que tienen un eje de simetría radial mientras que otros no. Pues bien, ya está, los rosetones los vamos a clasificar en dos tipos a los que se da un nombre aunque lo importante es saber y comprender sus características:



Rosetones diédricos: sus pétalos tienen simetría radial.
Rosetones cíclicos: sus pétalos no tienen simetría radial.

La notación que se utiliza es muy sencilla porque consta de dos elementos, las letras d o c según sea diédrico o cíclico y un subíndice que nos indica el número de pétalos que posee. Al final se deja planteado el siguiente problema: entre las llantas de las ruedas de los coches, hay un modelo que aparece con más frecuencia que los demás, ¿cuál es?... Pues a fijarse, y cuando crean haberlo descubierto se lo comunican a su profesor…

El taller termina entregando a cada uno material (papel cuadradiculado, tijeras, lápiz, etc.) para hacer rosetones y frisos y en los que la creatividad mostrada por los estudiantes nos deja generalmente sorprendidos.



El marcalibros muestra ejemplos de unos y otros.

He pretendido poner de relieve la necesidad de complementar la metodología tradicional con otras. En particular con el desarrollo de talleres. En estos momentos aún hay quien se resiste a estas innovaciones pero estimo que los resultados de los estudios ponen de manifiesto que debemos introducir cambios en la forma de enseñar y en la forma de conseguir que nuestros estudiantes aprendan las matemáticas. Ya sé que hay otros aspectos tan importantes como este (actualización de los contenidos, formación inicial, formación permanente, etc.) y espero que se produzca la reflexión colectiva sobre ellos para que tomen decisiones los que deben hacerlo. ■

para saber más

- Balbuena Castellano, L. (2009). *El ñandutí y las matemáticas*. Paraguay: fundación en Alianza, Asunción.
- Balbuena, L., y De la Coba, L. (2002). *Geometría de los calados canarios*. Servicio de publicaciones Cajacanarias.
- Balbuena, L.; Cutillar, L., y De la Coba, L. (2003). *El profesor de matemáticas en un instituto de enseñanza secundaria*. Proyecto Sur.