

LA FUNDAMENTACIÓN FILOSÓFICA DEL «TRANSFINITO» EN G. CANTOR Y LA CUESTIÓN DEL INFINITO

MANUEL CABADA CASTRO
Universidad Complutense de Madrid

RESUMEN: El «transfinito» de Cantor es una importante aportación matemática y al mismo tiempo filosófica a la cuestión del infinito. Más allá de la relevancia que el transfinito cantoriano tiene en el campo de la matemática, se intenta aquí analizar la dimensión filosófica que el propio Cantor concede a su «transfinito», al relacionarlo él mismo con los debates histórico-filosóficos en torno a la posibilidad y realidad del tradicionalmente denominado infinito «actual». En este sentido, sobre la base de los escritos temáticos y epistolares de Cantor se pretende poner de manifiesto su interés por propugnar no sólo la posibilidad sino la realidad del «transfinito» o del infinito «actual» tanto en la dimensión cognoscitiva como en la realidad material.

PALABRAS CLAVE: Cantor, transfinito, infinito.

Philosophical Foundation of the «transfinite» in G. Cantor and the Question of Infinity

ABSTRACT: The «transfinite» of Cantor is an important mathematical as well as philosophical contribution to the question of infinity. Beyond the relevance that the transfinite of Cantor has in the field of mathematics, here is an attempt to analyse the philosophical dimension that Cantor himself gives to his «transfinite», relating the same with the historical-philosophical debates about the possibility and reality of the traditionally called «actual» infinity. In this sense, on the base of the thematic writings and correspondence of Cantor is shown his interest to defend not only the possibility but also the reality of the «transfinite» or of the «actual» infinity both in the cognitive dimension as in the material reality.

KEY WORDS: Cantor, transfinite, infinity.

La posibilidad o realidad del infinito en el ámbito no divino, no identificándose naturalmente sin embargo con la absoluta infinitud de la divinidad, es una cuestión de gran trascendencia filosófica en relación con una comprensión adecuada de la realidad, cuestión esta que aparece, se oculta y reaparece de nuevo a lo largo del proceso filosófico de la reflexión occidental.

Georg Cantor (1845-1918), bien conocido como matemático, pero no tanto como interesado en problemas filosóficos fundamentales, es un hito importante en este proceso, con la peculiaridad de que sus reflexiones sobre el infinito surgen precisamente de la necesidad de darle a su «transfinito» matemático una adecuada base filosófica.

El filósofo de referencia más cercano a él, por la temática general y por su preocupación por la cuestión del infinito, era obviamente B. Bolzano (†1848), quien tiene, efectivamente, el mérito de haber propugnado la infinitud en la realidad en una época como la poskantiana, en un ambiente ideológico no especialmente propicio para ello, extendiendo a las cosas una infinitud, que su contemporáneo Hegel había reivindicado ya, frente a Kant, sobre todo en el ámbito especulativo y epistemológico.

Es esto lo que justifica la estima que de él mostrará Cantor, quien lo considerará como «el más decidido propugnador del propiamente-infinito [Eigentlich-unendliche]» y «agudísimo filósofo y matemático», indicando seguidamente que la finalidad del escrito bolzaniano *Paradoxien des Unendlichen* es «demostrar que no existen en absoluto las contradicciones buscadas en el infinito por escépticos y peripatéticos *de todos los tiempos* tan pronto como uno se toma el naturalmente no siempre fácil trabajo de considerar internamente y con toda seriedad los conceptos de infinito según su verdadero contenido»¹.

Ello no impide, sin embargo, que Cantor sea de la opinión de que Bolzano carece todavía de la conceptualización matemática necesaria para abordar con garantías y de manera precisa la problemática abordada por él:

«Bolzano es quizá —comenta Cantor— el único en el que se hace una cierta justicia a los números propiamente-infinitos; al menos habla mucho de ellos. No estoy en absoluto, con todo, de acuerdo con él en el modo de su tratamiento, al no ser él capaz de establecer una conveniente definición de los mismos [...] Le falta al autor [de *Paradoxien des Unendlichen*] en relación con la verdadera concepción de los números determinados-infinitos [bestimmt-unendlicher] tanto el concepto general de *potencia* [Mächtigkeit] como el concepto preciso de *número* [Anzahlbegriff]. Es verdad que ambos conceptos aparecen germinalmente en algún momento en él [...], pero, según me parece, no son elaborados de manera plenamente clara y concreta, derivándose de ello muchas inconsecuencias e incluso algunos errores de este estimable escrito. A mi modo de ver, *sin* los mencionados dos conceptos *no* se avanza en la teoría de conjuntos»².

Las aportaciones en este sentido de Cantor han sido consideradas, en efecto, con razón como una verdadera revolución en el ámbito de las matemáticas. Lo que me parece, sin embargo, menos conocido es el entronque que tal revolución tiene con el pensamiento filosófico y, de manera especial, con la reflexión sobre el infinito, algo de lo que el propio Cantor, según se verá, era muy consciente. Me limitaré, pues, seguidamente sobre todo a hacer referencia a esta conexión de la problemática matemática cantoriana con la temática filosófica de la infinitud. Se podrá ver así cómo la reflexión sobre la infinitud recibe de este modo un nuevo y decidido impulso, que afectará de manera más directa a la fundamentación de lo matemático, pero que repercutirá al mismo tiempo sobre la comprensión misma de la infinitud y de la realidad en general.

Pues bien, Cantor introducirá el concepto de número «transfinito» en el contexto de los «conjuntos» infinitos, yendo así, en consecuencia, más allá del recha-

¹ CANTOR, G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* (ed. Ernst Zermelo), Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1966, p. 179. El término «propiamente-infinito» es utilizado habitualmente por Cantor para designar el «infinito actual» en cuanto diferente del mero «infinito potencial» (éste es designado, por el contrario, como el «impropiamente-infinito»).

² CANTOR, *Gesammelte...*, 180.

zo de Leibniz de la consideración de los números como una «totalidad» y no reduciendo tampoco, por tanto, la visión del infinito numérico a la mera sucesión «indefinida» de los números finitos.

En este sentido, existe concretamente para Cantor un *verdadero* número «infinito», que es el que corresponde al conjunto infinito de los números finitos y, que en consecuencia, se distingue tanto de los números finitos mismos como de la *indefinidad* de su sucesión. Para evitar tal confusión (que no es otra sino la confusión, que Cantor tanto combate, entre el «infinito en acto» y el «infinito en potencia»), el propio Cantor dice que denomina «el número transfinito más pequeño con un signo, a saber ω , *distinto* de ∞ , correspondiente al impropriamente-infinito»³.

De este modo, el número transfinito ω es para Cantor el «más pequeño número *perfectamente determinado* [*festbestimmte*], que es mayor que *todos* los números finitos ν »⁴. Además, este número «ordinal» transfinito ω , el «más pequeño» de todos, puede en cierto modo, aun siendo infinito, ser mayor que él mismo o, más exactamente, ser «equivalente» al doble, triple, etc., de él mismo. De modo que existen infinitos mayores y menores. Pues, tal como dice Cantor, el transfinito ω puede también «ser agrandado o aumentado al próximo mayor número ordinal $\omega + 1$, éste de nuevo a $\omega + 2$, etc.»⁵. Los transfinitos ω , $\omega + 1$, etc., son así para Cantor —tal como le comunica a R. Lipschitz en carta de 19 de noviembre de 1883— «determinados *modos* del acabado-infinito [*Vollendetunendlichen*], toda vez que éste «puede aparecer en diversas modificaciones, diferenciables entre sí con la máxima precisión por medio del *así llamado 'finito entendimiento humano'*»⁶.

Y es justamente en este contexto donde Cantor se enfrenta a una de las objeciones de Aristóteles contra la realidad del infinito numérico, en cuanto que a juicio del Estagirita «lo finito sería eliminado y destruido por lo infinito, en el caso de que éste existiera». A ello replica, sin embargo, Cantor aludiendo a la necesidad de formular una esclarecedora distinción al respecto, expresada por él en los siguientes términos:

«A un número infinito, si éste es pensado como determinado y acabado, puede *muy bien* añadirse uno finito y ser unido a él, *sin* que por ello se produzca la destrucción del último (es más bien el número infinito el que es modificado por una tal adición a él de un número finito); es únicamente el proceso *inverso*, la adición de un número infinito a uno finito, si éste es colocado en primer lugar, el que opera la destrucción del último [el finito], sin que se produzca una modificación del primero [el infinito]»⁷.

³ CANTOR, *Gesammelte...*, 395. Cf. *Íd., o. c.*, 375.

⁴ CANTOR, G., *Briefe* (hrsg. von H. Meschkowski und W. Nilson), Berlín / Heidelberg, Springer-Verl., 1991, p. 182.

⁵ CANTOR, *Gesammelte...*, 405. Para Cantor no sólo el transfinito ω , sino «todo número transfinito es *capaz de aumento*» (CANTOR, *Briefe...*, 174). Ver también CANTOR, *Briefe...*, 267.

⁶ CANTOR, *Briefe...*, 149.

⁷ CANTOR, *Gesammelte...*, 174.

En consecuencia, y dicho más brevemente: «Siendo ω el primer número de la segunda clase numérica, resulta que $1 + \omega = \omega$; por el contrario, $\omega + 1 = (\omega + 1)$, en donde $(\omega + 1)$ es un número totalmente distinto de ω »⁸.

Cantor puso, por lo demás, un especial empeño en advertir que el mencionado número transfinito ω no puede ser visto en modo alguno *en continuidad* con los números «finitos», por más que ello no impida que pueda y deba ser considerado con todo derecho él mismo como un «número». Véase lo que escribe en el contexto sobre todo de su crítica a Fontenelle:

«Todo número menor que ω es un número finito y es superado en magnitud por otros números finitos v . Por el contrario, aquí $\omega - v$ es siempre igual a ω y no se puede decir por tanto que los crecientes números finitos v se vayan acercando arbitrariamente a su término ω ; cualquier número v , por grande que sea, permanece más bien tan alejado de ω como el número finito más pequeño. Se pone así de manera especial de manifiesto algo muy importante y decisivo, que se refiere a que mi número ordinal transfinito más pequeño ω y consecuentemente todos los números ordinales mayores están *totalmente fuera de la serie numérica inacabada* 1, 2, 3, etc. El ω *no* es algo así como el *máximo* de los números finitos (no existe un número tal), sino que ω es el *mínimo* de todos los *infinitos* números ordinales»⁹.

Y, a pesar de todo, el mencionado número cantoriano no carece de verdadera realidad en cuanto número, tal como le comenta Cantor, en su carta de 5 de octubre de 1883, al filósofo y psicólogo Wilhelm Wundt: «Aquí ve usted por qué mi número ω tiene la misma justificación para existir, sí, la misma existencia, como por ejemplo $\sqrt{2}$. Así como no podemos alcanzar ω aumentando v , de la misma manera no podemos alcanzar $\sqrt{2}$ [...]. Todo cuanto se podría decir, por tanto, contra la *existencia* y *realidad* de ω *exactamente lo mismo puede afirmarse respecto de $\sqrt{2}$* »¹⁰.

El precedente comentario y crítica, al mismo tiempo, de la interpretación que hace Wundt acerca del transfinito cantoriano está asimismo presente en lo que le comunica a Kurd Lasswitz sólo algunos meses más tarde (15 de febrero de 1884):

«Quiero llamar la atención —le dice— sobre la *generalidad* [*Allgemeinheit*], precisión y concreción de mi definición de número; no hay aquí diferencia

⁸ CANTOR, *Gesammelte...*, 177. Sobre esta crítica de Cantor a Aristóteles puede verse DAUBEN, JOSEPH W., *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of Infinity* (Princeton, New Jersey Princeton Univ. Press, 1990), 122-123.

⁹ CANTOR, *Gesammelte...*, 406-407. En este sentido el filósofo y matemático L. Couturat (†1915) decía que el primer «principio absolutamente erróneo», sobre el que se basan «todos los argumentos dirigidos desde hace siglos contra la posibilidad del número infinito» es el de que «el número infinito es el más grande de todos los números». Cf. COUTURAT, L., *De l'infini mathématique* (París, Blanchard, 1973), 454. Ver también ÍD., *o. c.*, 447. Couturat, seguidor y admirador de Cantor, decía que «la creación de los números transfinitos» había sido una «invención verdaderamente genial» (ÍD., *o. c.*, 455), realizada «por un matemático profundo y sutil, que es también un filósofo infinitista de una lógica impecable» (ÍD., *o. c.*, 456).

¹⁰ CANTOR, *Briefe...*, 139.

alguna entre finito e infinito. Todo número transfinito de la segunda clase numérica tiene, según su definición, *la misma concreción, la misma buena ordenación en sí* que cualquier número finito [...] El concepto de ω , por ejemplo, no contiene *nada fluctuante, nada indeterminado, nada mudable, nada potencial* y esto mismo es válido respecto de todos los otros números transfinitos. Se *contrapone*, como todo número finito, por ejemplo el 7 o el 3, a los signos indeterminados x, a, b del cálculo algebraico, con los que en su carta compara usted los números transfinitos. Se desvía en ello usted, de la misma manera que el señor Wundt, del sentido que deben tener en mí los números transfinitos»¹¹.

Como es bien sabido, Cantor en su concepción de los conjuntos infinitos habla tanto de su «orden» (de aquí la denominación de «número ordinal») como de su «potencia» (*Mächtigkeit*), que viene a identificarse con el por él también denominado «número cardinal». Este último tiene que ver con la magnitud o cantidad de los elementos del conjunto, prescindiendo en principio de su «orden». Se trata de una distinción en relación con los conjuntos numéricos, que resulta necesaria para entender y expresar el «cambio» que se opera al pasar de la dimensión «finita» a la «infinita», tal como lo ve Cantor:

«El concepto de número [Zahlbegriff] entero —nos dice al respecto—, que en el finito sólo tiene el trasfondo del *número* [Anzahl], se *disocia* en cierto modo, si ascendemos al infinito, en *dos* conceptos, en el de *potencia* [Mächtigkeit], que es independiente del orden que se da a un conjunto, y el de *número* [Anzahl], que está necesariamente ligado a una ordenación regular del conjunto, en virtud de la cual éste se convierte en un *conjunto bien ordenado*. Si desciendo de nuevo hacia abajo del infinito al finito, veo asimismo de manera clara y bella cómo ambos conceptos se unifican de nuevo y *confluyen* en el concepto del número [Zahl] entero finito»¹².

De acuerdo con ello, así como el número transfinito ω tiene que ver con el «orden», Cantor expresa la «cardinalidad» o «potencia» del conjunto de los números naturales por medio de la primera letra del alfabeto hebreo א (aleph). Es así א el menor número «cardinal» transfinito, de la misma manera que ω era el menor número «ordinal» transfinito.

¹¹ CANTOR, *Briefe...*, 180-181.

¹² CANTOR, *Gesammelte...*, 181. Couturat explica y aclara los términos cantorianos de «potencia» y «número» del modo siguiente: «Es necesario distinguir cuidadosamente, en los conjuntos infinitos, la *potencia* y el *número*: la potencia, que representa simplemente la multitud de los elementos de un conjunto, y el número, que representa el mismo conjunto bien ordenado, es decir, dispuesto en una serie lineal, que depende consecuentemente del orden asignado a los elementos en esta serie. Un conjunto infinito dado tiene siempre evidentemente la misma potencia; pero no tiene siempre el mismo número, cuando se cambia el orden de los elementos [...] En consecuencia, números infinitos diferentes pueden ser a la vez iguales desde el punto de vista de la potencia y desiguales en cuanto números que implican órdenes diferentes» (COUTURAT, *De l'infini...*, 448-449). O dicho de otra manera, respecto de esto último: «Dos conjuntos pueden tener la misma potencia sin tener el mismo número, y, en consecuencia, dos números infinitos pueden ser equivalentes (de la misma potencia) sin ser iguales» (Íd., *o. c.*, 452).

Para Cantor existe, pues, una jerarquía de infinitudes numéricas¹³, siendo cada una de ellas, con todo, verdadera y estricta infinitud «actual», es decir, una concreta «totalidad» infinita. Así, por ejemplo, en referencia a «la totalidad, el conjunto [Inbegriff] de *todos* los números finitos enteros positivos» indica Cantor que «este conjunto [Menge] es *una cosa por sí misma* y, prescindiendo totalmente de la secuencia natural de los números correspondientes, forma un cuanto [Quantum] determinado, fijo en todas las partes, un ἄφωρισμένον, que ha de ser denominado claramente como mayor que todo número [Anzahl]»¹⁴.

De este modo, este conjunto, es decir, el conjunto infinito de los números naturales (1, 2, 3, etc.) es infinito, con \aleph como número «cardinal». Pero el precedente conjunto infinito, al ser el conjunto de los números enteros *no-negativos*, es, a su vez, subconjunto (infinito) respecto del conjunto superior de los números enteros (tanto positivos como negativos), de la misma manera que este último conjunto es por su parte subconjunto en relación con el conjunto de los números racionales, etc. Tal «subordinación» no obsta, sin embargo, a que cada uno de los conjuntos sea en sí mismo «infinito»¹⁵.

Pero algo similar ocurre también en el «interior», por así decirlo, del conjunto de los números naturales, en donde el conjunto de tales números es igual en número al conjunto, por ejemplo, de los pares, a pesar de ser éstos una «parte» solamente de los números naturales. Ambos son, por tanto, conjuntos con un número infinito de elementos y pueden ser denominados en consecuencia, en el lenguaje cantoriano, «equipotentes» o «equivalentes»¹⁶.

De modo que el tradicional postulado euclidiano de que «el todo es mayor que la parte» queda así, en esta dimensión de la infinitud, definitivamente superado. Más aún, es precisamente esto lo que caracteriza o define al conjunto «infinito» en cuanto tal, el ser semejante a uno al menos de sus subconjuntos, es decir, «equivalente» al mismo, estando en posesión ambos, por tanto, de igual

¹³ A este respecto escribe E. Maor: «Cantor mostró, en contra de las concepciones dominantes, que justamente no hay una infinitud, sino muchas *clases* de infinitud, clases que son esencialmente diferentes las unas de las otras, pero que pueden ser comparadas las unas con las otras de modo similar a como ocurre con los números ordinarios. Existe, en otras palabras, una entera *jerarquía* de infinitudes y en esta jerarquía se puede hablar de infinitudes que son mayores que otras infinitudes» (MAOR, E., *To Infinity and Beyond. A cultural History of the Infinite*, Boston / Basel / Stuttgart, Birkhäuser, 1986, 54-55). Maor habla todavía de la existencia de una «*infinita jerarquía de conjuntos infinitos*» en Cantor (Cf. ÍD., *o. c.*, 63). Decía por su parte ya Couturat (en analogía con el ya mencionado «primero» de los dos errores que están, según él, en la base del rechazo tradicional de la posibilidad del «número infinito») que el otro de tales errores consiste precisamente en afirmar que «*todos los números infinitos son iguales*» (COUTURAT, *De l'infini...*, 454).

¹⁴ CANTOR, *Gesammelte...*, 401.

¹⁵ Cf. MAOR, *To Infinity...*, 40-41.

¹⁶ Dada esta diversificación o jerarquización en el seno del «transfinito» establecida por Cantor, no se recataba éste en decir que «en todos los filósofos está ausente el *principio de la diferencia* en el transfinito, el cual conduce a los diferentes números transfinitos y a las diversas potencias» (CANTOR, *Gesammelte...*, 391).

número «cardinal»¹⁷. Cantor era bien consciente de ello al indicar en carta de 5 de junio de 1886 que «los conceptos que pertenecen a la dimensión de lo finito necesitan ser pertinentemente modificados en su ampliación a lo suprafinito [Ueberendlichen], teniendo en cuenta la perfectamente regulada, pero también diferente, naturaleza de lo suprafinito»¹⁸. De lo contrario se corre el riesgo de rechazar este último sirviéndose para tal rechazo de razonamientos que pertenecen solamente a la dimensión finita, tal como se lo indicaba a G. Eneström algunos meses antes, en carta de 4 de noviembre de 1885:

«Todas las así denominadas pruebas contra la posibilidad de los números infinitos actuales son [...] fundamentalmente erróneas por el hecho de que desde el principio a los números en cuestión se les atribuyen o más bien se les imponen las características todas de los números finitos, mientras que por otra parte los números infinitos, si es que de alguna forma pueden ser pensados, constituyen necesariamente por su contraposición con los números finitos un género numérico totalmente nuevo, cuya estructura depende totalmente de la naturaleza de las cosas y es objeto de la investigación, no de nuestro capricho o de nuestros prejuicios»¹⁹.

Con el precedente modo de pensar reivindica, pues, Cantor una específica dimensión, intermedia en cierto modo entre las cosas finitas y lo infinito divino, que sin ser finita no es sin embargo divina. Se trata de la dimensión de lo «transfinito», entre cuyas importantes características está la de ser algo concreto y «determinado» (es decir, infinito «actual», frente a la mera «indeterminación» del infinito «potencial») y, al mismo tiempo, diversificado o «jerarquizado» en sí mismo. Cantor se expresa sintéticamente al respecto de la siguiente manera:

«Lo que sostengo y creo haber demostrado [...] es que existe, después de lo finito, un *transfinitum* (al que se podría denominar también *suprafinitum*),

¹⁷ Como bien dice E. Maor en este contexto: «El hecho de que un conjunto infinito pueda no ser mayor que su propio subconjunto [...] fue visto como una inexplicable paradoja. A la perspicacia de Cantor se debe el haberse dado cuenta de que, lejos de ser una paradoja, este hecho representa la más fundamental propiedad de todo conjunto infinito: *el que pueda ser emparejado, en correspondencia de uno a uno, con un subconjunto de sí mismo*. En realidad, Cantor utilizó este mismo hecho como la definición de un conjunto infinito: la primera vez que este concepto fue definido de una manera clara y precisa» (MAOR, *To Infinity...*, 57).

¹⁸ CANTOR, *Briefe...*, 262. Cantor denomina en algunas ocasiones a su «transfinito» como «suprafinito».

¹⁹ CANTOR, *Gesammelte...*, 371-372. Cf. PURKERT, W. - ILGAUDS, H. J., *Georg Cantor 1845-1918* (Basel / Boston / Stuttgart, Birkhäuser Verl., 1987), 115. En carta algo posterior a su amigo Gutberlet de 24 de enero de 1886 alude Cantor a lo aquí ya dicho por él en su carta a Eneström, indicándole al mismo tiempo a su amigo, en similar sentido, que «todas las argumentaciones en contra de los números infinitos en acto se apoyan en un πρώτον ψεύδος [...]», que consiste en lo siguiente: «Desde el principio se le atribuye a la magnitud infinita actual todas las propiedades de la magnitud finita, de lo que fácilmente se deduce una contradicción con su no-ser-finito. Con ello se cree entonces tener a mano una prueba sobre su imposibilidad, cuando en realidad tal prueba no es sino un razonamiento circular» (CANTOR, *Gesammelte...*, 396).

es decir, una ilimitada jerarquía de modos determinados, que según su naturaleza no son finitos sino infinitos, pero que al igual que lo finito pueden ser determinados por medio de *números* concretos, bien definidos y entre sí diferenciables. Estoy, por tanto, convencido de que con las magnitudes finitas *no* se clausura la dimensión de las magnitudes definibles y de que, en consecuencia, las fronteras de nuestro conocimiento pueden ampliarse más sin que por ello sea necesario forzar en modo alguno a nuestra naturaleza. Propongo, por tanto, [...] esta otra tesis: *Omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt* [todo ya sea finito o infinito está *definido* y, excepto Dios, puede ser determinado por el entendimiento]»²⁰.

Así pues, la visión cantoriana de los números y de los conjuntos infinitos, en los que se asume explícitamente la paradoja como elemento interno y constituyente de los mismos, no los convierte por ello en algo meramente subjetivo o ideal. El propio Cantor decía alguna vez en este contexto (en carta de 5 de octubre de 1888 a P. Tannery): «Soy tanto *realista* como *idealista*»²¹. Y al final de esta misma carta hará referencia directa a la cuestión del «transfinito», abogando decididamente por su «realidad»:

«Si al número finito 7 o al número irracional $\sqrt{2}$ les compete en cierto sentido *realidad*, no están por detrás en lo que se refiere a *realidad* los números transfinitos, tanto los números cardinales transfinitos (= potencias) como también los números ordinales transfinitos y los tipos de orden. Sólo desde un punto de vista absolutamente insostenible de un *burdo finitismo*, tal como éste es sostenido recientemente por ejemplo por *Kronecker*, es posible dudar de la realidad de los números transfinitos y los tipos de orden»²².

Pero donde Cantor parece haberse expresado más resueltamente sobre la *realidad* de sus números podría ser en esta otra carta, de 30 de noviembre de 1895 (siete años más tarde), al matemático francés Ch. Hermite:

²⁰ CANTOR, *Gesammelte...*, 176. A esta cuestión de la «definición» o «determinación» de sus transfinitos se referirá Cantor en la carta que redacta para ser dirigida a A. Schmid, aunque fuera luego sustituida por otra más breve, según la información que se aduce en TAPP, C., *Kardinalität und Kardinäle. Wissenschaftshistorische Aufarbeitung der Korrespondenz zwischen Georg Cantor und katholischen Theologen seiner Zeit* (Franz Steiner Verl. Wiesbaden, Stuttgart, 2005) 503, 506. En ella analiza o aclara, en efecto, Cantor su «conjunto infinito» de la manera siguiente: «Aquello con lo que realmente nos encontramos es, pues, una cantidad [Quantum] en sí misma determinada, *no finita*, de determinadas cosas pensadas (1, 2, 3, ...); estas cosas no sólo se diferencian claramente entre sí, sino que son conceptualmente diferentes de todas las demás; en este sentido es, sin embargo, su conjunto, aunque no-finito, perfectamente *delimitado* [*begrenzt*]» (Cf. TAPP, *Kardinalität...*, 505). Esto requiere naturalmente, como seguidamente señala Cantor, un concepto de «limitación» o «delimitación» («*Begrenztheit*») suficientemente amplio como para dar cabida en él a la comprensión no sólo a los conjuntos finitos (en los que se da un último miembro o componente de los mismos), sino también de los infinitos. Véase TAPP, *Kardinalität...*, 505-506.

²¹ CANTOR, *Briefe...*, 323.

²² CANTOR, *Briefe...*, 324. Por lo demás, en relación con el transfinito ω , recuérdese lo que ya señalaba Cantor sobre que «todo cuanto se podría decir contra la *existencia* y *realidad* de ω exactamente lo mismo puede afirmarse respecto de $\sqrt{2}$ » (CANTOR, *Briefe...*, 139).

«Permítame poner de relieve acerca de esto que me parece que la realidad y la absoluta regularidad de los números enteros es *mucho más* fuerte que la del mundo de los sentidos. Y el hecho de que ello sea así tiene una única y muy sencilla razón, a saber, que tales números existen [existiren] tanto separados como en su totalidad infinita actual como ideas divinas in intellectu Divino en el más alto grado de realidad»²³.

Dejando para más adelante el análisis de la relación que establece Cantor entre su «transfinito» y la divinidad, a la que en el precedente texto se alude, conviene poner de manifiesto ya que sus análisis y reflexión sobre el «transfinito» han de ser vistos en continuidad y conexión con el debate secular en torno a la problemática del infinito en general.

La toma de posición teórica de Cantor está naturalmente de manera explícita en contra de lo que él también denomina «*horror infiniti*»²⁴, indicando por lo demás al respecto que se trata de una posición adoptada por él en cierto modo en contra de sí mismo:

«He llegado casi contra mi voluntad —nos dice— a la idea de considerar lo infinitamente grande no meramente en la forma de lo que crece ilimitadamente [...] sino también a fijarlo matemáticamente por medio de números en la forma determinada del infinito-acabado [Vollendet-unendlichen], porque en contra de tradiciones por mí estimadas y en el transcurso de esfuerzos e intentos científicos de muchos años me he visto forzado lógicamente a ello y no creo, por tanto, que se puedan presentar razones contrarias a las que ya no sepa responder»²⁵.

Así pues, Cantor se declara, en relación con su «transfinito», manifiestamente a favor de la verdad y legitimidad del tradicionalmente denominado «infinito en acto» (o «infinito actual»), tan decididamente rechazado en la tradición aristotélica. Así, en carta al matemático y colega D. Hilbert de 2 de octubre de 1897 establece la identidad entre ambos infinitos: «El 'transfinito' coincide con lo que desde la antigüedad se ha denominado 'infinito actual' ['Actualunendliches'] y ha de ser considerado como un ἀφωρισμένον»²⁶.

En tal sentido, si se atiende a las diversas maneras como el «infinito actual» puede presentarse o mostrarse, Cantor dirá que los números transfinitos «son formaciones o modificaciones delimitadas de manera determinada [bestimmt abgegrenzte] (ἀφωρισμένα) del infinito actual»²⁷. Y dado también que, según lo

²³ Cf. PURKERT, *Georg...*, 105. Ver también CANTOR, *Briefe...*, 428-429.

²⁴ Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 374.

²⁵ CANTOR, *Gesammelte...*, 175. En el mismo sentido se expresará más tarde, en carta de 22 de enero de 1886 al cardenal y jesuita J. B. Franzelin, al comunicarle allí en relación con su «transfinito» o «Infinitum creatum»: «las razones que en esta cuestión a lo largo de una investigación de unos veinte años, puedo decir que contra mi voluntad, ya que se contraponen a una tradición muy estimada siempre por mí, me han urgido desde dentro y en cierto modo me han atado son más poderosas que cuanto hasta ahora he visto que se haya dicho en contra, aun habiéndolo ampliamente examinado» (CANTOR, *Gesammelte...*, 399).

²⁶ Cf. PURKERT, *Georg...*, 226.

²⁷ CANTOR, *Gesammelte...*, 395-396.

ya indicado, todo número transfinito es «capaz de aumento», es decir, puede ser mayor que otro transfinito anterior, es lógico que Cantor sostenga lo mismo respecto del «infinito actual» en general, al indicar explícitamente acerca de la afirmación de que «el infinito actual *es necesariamente no-aumentable* [*unvermehrbar*]» que se trata de «un error del que casi se puede decir que está generalmente extendido en la filosofía, no sólo en la *antigua* y en la *escolástica* dependiente de ella, sino también en la *más nueva y recentísima*»²⁸.

Ahora bien, en la reflexión cantoriana sobre el infinito, en el contexto de su «transfinito», ocupa un lugar importante la distinción entre dos tipos de «infinito» totalmente diferentes (a pesar de su común denominación como «infinitos»), a los que no pocas veces designa él como infinito «propio» e infinito «impropio». Así, por ejemplo, cuando Cantor intenta especificar el modo «determinado» de ser de su infinito numérico, el «transfinito», frente al infinito «impropio»:

«El infinito —escribe Cantor en carta a Wundt de 5 de octubre de 1883— surge lógicamente de dos maneras por medio de la negación del *número finito determinado*. En primer lugar, al dejar de lado el predicado de la *determinación* [*Bestimmtheit*] surge el número *mudable* [*veränderliche*], que permanece *finito*, al que denomino *infinito impropio*. En segundo lugar, al dejar de lado el predicado 'finito' conservando el predicado *determinado* surge el número *infinito propio*, el ω en primer lugar y, una vez que se tiene ω , de él procede el $\omega + 1$, $\omega + 2$, ..., etc.»²⁹.

De aquí se deriva, según se dice en esta misma carta, la diferente o más bien opuesta posibilidad de aplicación del «concepto límite» a uno u otro modo de infinito:

«Mi 'infinito impropio' —indica aquí mismo a Wundt— no es en absoluto un concepto límite; según mi explicación, es un número *mudable finito*, ya crezca sobre todos los límites o bien decrezca por debajo de todos ellos. Puede usted, por el contrario, concebir mi ω como concepto límite, es decir, como límite, hacia el que se dirige, sin alcanzarlo jamás, un número mudable, ilimitadamente creciente (es decir, lo que denomino infinito impropio)»³⁰.

Debido a ello, en carta a K. Lasswitz de 15 de febrero de 1884, sólo algunos meses después de la precedente, indicará Cantor que se trata en realidad de dos conceptos «totalmente diferentes entre sí», añadiendo seguidamente: «*En modo alguno* pueden ser considerados como compaginables o similares. La conjun-

²⁸ CANTOR, *Gesammelte...*, 404-405. En relación con esta última afirmación de Cantor conviene tener en cuenta, sin embargo, lo que él mismo añade al respecto en nota a pie de página: «Dado que desde hace cuatro años, después de la publicación de mis *Grundlagen*, he tenido tiempo para analizar algo más detalladamente las obras de la filosofía antigua y escolástica, sé también ahora que el infinito actual *in natura creata* [en la naturaleza creada] ha tenido en todos los tiempos sus defensores en el seno de la especulación cristiana» (CANTOR, *Gesammelte...*, 405).

²⁹ CANTOR, *Briefe...*, 139.

³⁰ *Ibid.* Resulta así comprensible lo que dice Cantor en otro lugar sobre el «límite» en relación con su «transfinito»: «Límite es siempre algo en sí *fijo, inmutable* y por ello entre los dos conceptos de infinitud sólo el *transfinito* puede ser pensado como *existente* [*seiend*] y, eventualmente y en cierto sentido, como *límite fijo*» (CANTOR, *Gesammelte...*, 391).

ción o mezcla, tan frecuente en todos los tiempos, de estos dos conceptos totalmente dispares es la causa, según mi firme convicción, de innumerables errores; y de manera particular veo aquí la razón de por qué no se descubrieron ya con anterioridad los *números transfinitos*»³¹.

La precedente diferencia en la que repetidamente insiste Cantor entre el «infinito impropio» y el «infinito propio» viene a ser igual a la más conocida y tradicional entre el «infinito potencial» y el «infinito actual», a la que se refiere asimismo, contraponiendo entre sí también ambos conceptos en un contexto tanto matemático como filosófico, en carta a Eulenburg de 28 de febrero de 1886:

«La expresión infinito potencial se utiliza preferentemente allí donde se da una magnitud indeterminada, *mudable y finita*, la cual o bien crece más allá de todos los límites finitos (con esta imagen pensamos, por ejemplo, el denominado tiempo, contado desde un determinado momento inicial) o bien decrece por debajo de cualquier límite finito de pequeñez (ésta es, por ejemplo, la representación de lo que se denomina diferencial). De modo más general, hablo de un infinito potencial siempre que se toma en consideración una magnitud *indeterminada*, capaz de innumerables determinaciones»³².

En contraposición con este «infinito potencial», por «infinito actual» entiende, en cambio, Cantor «un cuanto [Quantum], que por una parte *no es mudable*, sino que en todas sus partes es algo fijo y determinado, una verdadera *constante* [Konstante], pero que por otra parte sobrepasa al mismo tiempo en magnitud a toda magnitud finita de la misma especie»³³.

Ahora bien, que Cantor piensa de la misma manera en sus diversas formulaciones acerca de los distintos y opuestos modos de infinitud lo muestra sintéticamente él mismo al reunir en algún momento las mismas en su mutua oposición en el contexto de su crítica a Wundt, tal como ésta es expresada por él en la mencionada carta a K. Lasswitz de 15 de febrero de 1884. Para Cantor hay, en efecto, una «diferencia fundamental» entre, según sus palabras, «por una parte, el infinito impropio = finito mudable = infinito sincategoremático (ἄπειρον) y, por otra, el infinito propio = transfinito = infinito acabado = *ser infinito* [Unendlichseiendem] = infinito categoremático (ἄφωρισμένον)»³⁴.

De todos modos es significativo que en este emparejamiento y simultánea oposición de las diversas formulaciones cantorianas sobre el infinito, el *ser infinito* (o *Unendlichseiendes*) acompañe únicamente a las formulaciones relacionadas con el «infinito actual» y no con el «potencial».

³¹ CANTOR, *Gesammelte...*, 395. Ver también CANTOR, *Briefe...*, 182. En contra de la confusión o indiferenciación entre ambos modos de infinitud se expresa Cantor en diversos lugares. Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 172, 374, 409.

³² CANTOR, *Gesammelte...*, 401.

³³ *Ibíd.*

³⁴ CANTOR, *Gesammelte...*, 391. De todos modos Cantor prefiere en general, respecto de las diferencias establecidas en el seno de la concepción de la infinitud, su denominación de «infinito propio» - «infinito impropio» a la tradicional o escolástica de «infinito categoremático» - «infinito sincategoremático» u otras (Cf. CANTOR, *Briefe...*, 148, 174, 210-211), incluso a la de «indefinido» - «infinito» (Cf. *Íd.*, o. c., 210).

Tal emparejamiento en realidad no parece fortuito, dado que el propio Cantor, en carta de 28 de febrero de 1886 a Eulenburg, le responde que tiene «perfecta razón» cuando se pregunta si «no sería mejor retirarle al infinito potencial la expresión de *infinito*», indicando por su parte Cantor que tal infinito potencial «no es propiamente un infinito» y que debido precisamente a ello él lo denomina «infinito *impropio*». Y añade todavía: «Será, sin embargo, difícil evitar tal uso, y tanto más difícilmente cuanto que el infinito potencial es el concepto más fácil, más agradable, más superficial y más carente de independencia y con el que está casi siempre ligada la lisonjera ilusión de que con él se está en posesión de algo adecuado, verdaderamente infinito»³⁵.

Para Cantor, por el contrario, el verdadero y auténtico infinito no es, en consecuencia, el «potencial» sino el «actual» o «propio», entre otras razones porque es para él esencial, como ya sabemos, que tanto lo finito como lo infinito sean «determinados». Y sin «determinación» o concreción no hay realmente verdadero «ser»: «A lo indeterminado, mudable, infinito-impropio, cualquiera que sea la forma en que aparecen, no les puedo atribuir un ser [Sein], ya que no son sino conceptos relativos [Beziehungsbegriffe] o puras representaciones subjetivas o intuiciones (imaginationes)»³⁶.

Se comprende desde estas consideraciones el rechazo general de Cantor a la admisión de las magnitudes infinitamente pequeñas en cuanto tales, puesto que ello implicaría un proceso relacionado con el infinito potencial o impropio, que en sí mismo, a tenor de lo dicho, carece de «ser». Es lo que le viene a decir a G. Mittag-Leffler en carta del 10 de mayo de 1882: «Las *magnitudes infinitamente pequeñas* [...] en cuanto *tales* no tienen justificación alguna de existencia; para mí al menos hay únicamente magnitudes *mudables*, que *se van haciendo* infinitamente pequeñas, pero *no* magnitudes infinitamente pequeñas. Lo infinitamente pequeño es, en otras palabras, únicamente un *modo* [Modus] de la mutabilidad de las magnitudes *finitas*, pero *no* en sí mismo una magnitud»³⁷.

De esta manera Cantor viene a congeniar en realidad con el modo como Leibniz hablaba de sus infinitesimales. Así, en carta del 1 de mayo de 1888 a C. Gutberlet, en relación con la opinión de J. Pohle al respecto, escribe:

«El artículo de Pohle sobre la importancia objetiva de lo infinitamente pequeño contiene consideraciones muy bellas y valiosas. Pero está en un error al admitir lo infinitamente pequeño como elemento integrante actual para la explicación del continuo o bien para la fundamentación del cálculo infinitesimal. Estoy con él de acuerdo en la importancia de lo infinitamente pequeño, pero no del infinitamente pequeño en cuanto éste sería un ser actual, infinitamente pequeño, sino únicamente en cuanto que es algo potencial, que se va haciendo [werdendes] infinitamente pequeño»³⁸.

³⁵ CANTOR, *Gesammelte...*, 404.

³⁶ CANTOR, *Gesammelte...*, 205.

³⁷ CANTOR, *Briefe...*, 71. Véase en el mismo sentido CANTOR, *Gesammelte...*, 407-408.

³⁸ CANTOR, *Briefe...*, 314. Puede leerse también algo similar, en relación con este modo de pensar de Pohle, lo que les comunica, sólo algunos días después (20 de mayo de 1888), Can-

Para Cantor no hay, pues, en definitiva, tal como le comunica a G. Eneström el 6 de marzo de 1887, «*números determinados infinitamente pequeños*»³⁹. Desde este su punto de vista, Cantor considera la «diferencial» matemática como «una magnitud mudable que utilizamos a modo de recurso en las demostraciones, pero que no aparece ya en los resultados finales referidos a la realidad». En consecuencia, según seguidamente se dice, «no es lícito considerarla como perteneciente a la clase de conceptos que expresan, significan o representan algo en sí mismo invariable, constante, ser, sino que pertenece a los conceptos que expresan, significan o representan algo no invariable, algo mudable o un no-ser»⁴⁰.

Lo cual no impide que Cantor aprecie o valore la *utilidad* de dicho cálculo, relacionado directamente con el infinito «impropio» o «potencial»⁴¹. En este sentido, y seguramente con la mente puesta sobre todo en el conocido «infinito malo» de que habla Hegel, decía Cantor: «El infinito-impropio ha sido denominado con frecuencia por los modernos filósofos como infinito ‘malo’, injustamente a mi modo de ver, dado que se ha acreditado en la matemática y en las ciencias como un instrumento excelente y sumamente útil»⁴².

El precedente rechazo por parte de Cantor de los «números determinados infinitamente pequeños» ha sido considerado no pocas veces como algo que no parece estar en coherencia, sino más bien todo lo contrario, con su decidida propugnación de los «transfinitos». En tal sentido comentará R. Rucker, por ejemplo, que la prueba cantoriana de que no puede haber un número infinitesimal «es tan circular e inválida como los intentos finitistas de probar que no puede haber un número infinito», indicando al respecto que «hay casi tanta justificación para los infinitesimales como la hay para los ordinales transfinitos cantorianos»⁴³.

Es ésta una crítica muy similar a la formulada ya con anterioridad por Ernst Zermelo, el editor de las *Gesammelte Abhandlungen* de Cantor, en su comenta-

tor tanto a Jeiler (ver TAPP, *Kardinalität...*, 418-419) como a Heman, el 2 de junio del mismo año (ver TAPP, *Kardinalität...*, 381).

³⁹ CANTOR, *Briefe...*, 278. Sobre esta visión cantoriana de los infinitesimales puede verse DAUBEN, *Georg Cantor...*, 130-132.

⁴⁰ CANTOR, *Briefe...*, 235. Véase también CANTOR, *Gesammelte...*, 374. Apoyándose directamente en Leibniz, en carta de 19 de noviembre de 1883, indicará en similar sentido a R. Lipschitz que «en el cálculo *diferencial e integral* nunca se tiene que ver con magnitudes infinitamente pequeñas o infinitamente grandes, que podrían ser representadas como acabadas, es decir, inmutables, sino siempre y solamente con magnitudes arbitrariamente grandes o, como también se dice, con magnitudes que *se van haciendo* [*werdenden*] infinitamente pequeñas o infinitamente grandes» (CANTOR, *Briefe...*, 148).

⁴¹ El infinito «impropio» o «sincategoremático» es aquí «un mero concepto auxiliar y relacional de nuestro pensamiento», tal como, según advierte de nuevo seguidamente el propio Cantor, había sido ya visto por Leibniz (del que aduce aquí uno de sus conocidos textos al respecto). Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 180.

⁴² CANTOR, *Gesammelte...*, 172.

⁴³ Cf. RUCKER, R., *Infinity and the Mind. The Science and Philosophy of the Infinite* (Boston, Birkhäuser, 1982), 85. En similar sentido se expresa posteriormente también DAUBEN, *Georg Cantor...*, 131.

rio crítico respecto de la mencionada opinión cantoriana. Zermelo escribe aquí, en efecto: «La no-existencia de ‘magnitudes infinitamente pequeñas en acto [aktual-unendlichkleiner]’ es tan indemostrable como la no-existencia de los infinitos cantorianos, y el error en ambos casos es el mismo, atribuirles a las nuevas magnitudes determinadas propiedades de las normales ‘finitas’ que no les pueden pertenecer»⁴⁴.

Se recordará, efectivamente, que Cantor criticaba a los impugnadores de su «transfinito» acusándoles precisamente de razonamiento «circular» en el sentido de que de ese modo atribuían, según él, previamente a las magnitudes o números infinitos propiedades de lo finito para de ahí deducir la imposibilidad de los mismos⁴⁵. «Resulta curioso —comentan debido a ello W. Purkert y H. J. Ilgauds, en sintonía con lo dicho por Zermelo— que Cantor en su lucha contra la existencia de los números infinitos pequeños incurra en el mismo error»⁴⁶.

De todos modos, conviene añadir que el propio Cantor, a tenor de lo comunicado por él a K. Lasswitz en una carta hace poco dada a conocer, «relativizó su opinión y concedió la posibilidad de que posteriores investigadores lograsen definir de manera estricta las magnitudes infinitamente pequeñas»⁴⁷.

Considero importante, en cualquier caso, indicar que la preocupación fundamental de Cantor en su reflexión general sobre el infinito en sus distintas acepciones como «infinito en acto» o «infinito en potencia» es poner de relieve justamente que la dinámica de lo «potencial» no surge meramente de sí misma sino de una «actualidad» (el «infinito *en acto*») que la posibilita y moviliza. En tal sentido indica Cantor que el «infinito potencial [...] hace siempre referencia a un *transfinitum* que lo fundamenta, sin el cual no puede ni existir ni ser pensado»⁴⁸.

Esta base o fundamentación, constituida por el «infinito en acto», es imprescindible para que se pueda realizar el proceso indefinido mismo, tal como Cantor pone de relieve frente a quienes sólo aceptan el infinito «en potencia», comparando su «transfinito» o «infinito en acto» con el camino bien preparado sobre el que pisa el caminante, sin el cual no es posible avanzar. «Para un seguro caminar —comenta Cantor sobre todo contra los seguidores de Herbart— se necesita incondicionalmente fundamento y suelo firme y una calzada bien allanada, un camino que en parte alguna se interrumpe, sino que ha de ser y permanecer transitable en cualquier parte a donde conduzca el viaje». Y dado que el camino no puede tener fin, sino que es «infinito», tal infinitud implica o presupone lo «infinito actual». Lo cual significa que «*todo infinito potencial* (el límite ambulante [wandelnde Grenze]) exige un *transfinitum* (el camino seguro para andar)

⁴⁴ Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 439.

⁴⁵ Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 371-372, 396.

⁴⁶ PURKERT, *Georg Cantor...*, 114.

⁴⁷ Véase sobre esto PURKERT, *Georg Cantor...*, 115. Aquí mismo se añade que la previsión de Cantor se ha realizado en nuestra época en el denominado «análisis no standard». Ver también en relación con esto mismo los comentarios de los editores en CANTOR, *Briefe...*, 278-279.

⁴⁸ CANTOR, *Gesammelte...*, 391.

y no puede ser pensado sin este último». Cantor concluye su reflexión de este modo: «Dado que con nuestros trabajos hemos asegurado, bien fundamentado y cuidadosamente pavimentado el amplio camino real del transfinito, lo abrimos a la circulación y lo ponemos con la mayor complacencia, cual férreo fundamento, al servicio de todos los amigos del infinito potencial y a disposición especialmente del 'límite' herbartiano ansioso de viajar»⁴⁹.

En este sentido, Cantor bosquejó, en carta de mayo de 1886 al matemático G. Vivanti, una especie de prueba de la «imprescindibilidad» del infinito *actual* «tanto en el análisis como en la teoría de los números y el álgebra», que tiene un marcado carácter «transcendental» (en cuanto búsqueda y constatación de las «condiciones de posibilidad» para la explicación de un determinado fenómeno). Así la formula Cantor:

«Dado que no existe duda alguna de que no podemos prescindir de las magnitudes *mudables* en el sentido del infinito potencial, es también posible a partir de ello demostrar la necesidad del infinito-actual de la manera siguiente: Para que una tal magnitud mudable sea utilizable en una consideración matemática es estrictamente necesario que sea previamente conocido por medio de una definición el 'ámbito' ['Gebiet'] de su mutabilidad. Ahora bien, este 'ámbito' no puede ser él mismo una vez más algo mudable, ya que de lo contrario se carecería de cualquier base firme para la consideración. Luego este 'ámbito' es un conjunto [Wertmenge] infinito-actual determinado. De este modo, todo infinito potencial, si ha de ser utilizable de manera estrictamente matemática, presupone un infinito-actual»⁵⁰.

En definitiva, tal como le comenta ahora a Eulenburg en carta de 28 de febrero de este mismo año, «el infinito potencial tiene una realidad prestada [geborgte], en cuanto que hace siempre referencia a un infinito actual, por medio del cual se hace posible»⁵¹.

⁴⁹ CANTOR, *Gesammelte...*, 392-393. Son similares en cierto modo a esta visión de Cantor del infinito «potencial» como subordinado al infinito «actual» y como posibilitado por éste las reflexiones de L. Couturat en relación con la línea recta. En efecto, a la exclusión de la «infinitud actual» por parte de su oponente «finitista» (en la explicación de la posibilidad de prolongación indefinida de la recta) replica el «infinitista» (representante del propio Couturat en el diálogo entre el «finitista» y el «infinitista»): «Olvidáis que esta posibilidad de prolongación indefinida está *dada* con la recta misma. ¿Cómo, en efecto, podríais transportaros sobre una recta de longitudes cada vez más grandes, encontrar en ella puntos cada vez más alejados, y todo ello indefinidamente, si esta recta no os estuviera dada toda entera con su infinitud? [...] Así, la recta entera es absolutamente infinita, y es su misma infinitud la que permite prolongar indefinidamente todo segmento finito que se recorta en ella; de modo que su infinitud potencial implica, lejos de excluirla, su infinitud actual» (COUTURAT, *De l'infini...*, 489-490).

⁵⁰ CANTOR, *Gesammelte...*, 410-411.

⁵¹ CANTOR, *Gesammelte...*, 404. Todavía en el año siguiente, en carta al teólogo y filósofo Aloys Schmid de 22 de abril de 1887, le indicará lo siguiente: «Para la comprensión del pensamiento fundamental de la doctrina del transfinito no se necesita una previa formación en la moderna matemática; ésta puede ser eventualmente incluso perjudicial, ya que en el 'análisis infinitesimal' al infinito potencial se lo ha colocado en primer término e incluso (si prescindiendo de pocas y honrosas excepciones) se ha asentado en esos señores la opinión de que con

Me parece importante no perder de vista esta función posibilitadora del «infinito actual» en relación con la dinámica pensante ligada al denominado «infinito potencial» o «impropio» en Cantor, porque ello puede ayudar a comprender por qué éste, aun considerando en la mayor parte al menos de sus declaraciones lo «infinitamente pequeño» en cierto modo, y a la manera de Leibniz, como algo carente de «ser», como simple «ficción» útil para el cálculo matemático, no dejó sin embargo de considerar plausible o incluso aceptar claramente también la realidad y «actualidad» de lo infinitamente pequeño.

En efecto, ya en sus *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, después de expresar su sincero aprecio del «infinito impropio» o potencial como útil instrumento para la matemática y las ciencias en general, añadía:

«La magnitudes infinitamente pequeñas han sido hasta ahora, por lo que yo sé, elaboradas y utilizadas en general *únicamente* en la forma del infinito-impropio y son, en cuanto tal, capaces de todas aquellas diferencias, modificaciones y relaciones que tanto en el análisis infinitesimal como en la teoría de funciones se emplean y muestran, para allí fundamentar la rica plenitud de las verdades analíticas. Por el contrario, deberían por fin abandonarse como algo que no tiene sentido todos los intentos de convertir de manera forzada este infinito pequeño en un infinito pequeño *propio*. Si es que existen, es decir, son definibles, magnitudes infinitamente pequeñas propias, no están seguramente en conexión inmediata alguna con las magnitudes ordinarias que se *van haciendo* [werdenden] infinitamente pequeñas»⁵².

El último párrafo es especialmente significativo, porque parece dejar ya aquí abierta la posibilidad de que una comprensión de lo «infinitamente pequeño» diferente de la meramente ligada a la «potencialidad» del «hacerse» (*werden*) de lo «infinitamente pequeño» podría tener perfecta cabida en un sistema como el cantoriano, en donde el «infinito en acto» se hace presente en todo momento. Es decir, todo parece dar a entender que tras el rechazo cantoriano de lo «infinitamente pequeño» como algo ligado a la mera «potencialidad» está su decidida aversión a que la infinitud se vea reducida a un mero producto de la dinámica de la subjetividad matemática o filosófica.

De hecho, años más tarde, en carta de 22 de enero de 1886 al cardenal Franzelin, se expresará acerca del «infinito creado o transfinito» de la siguiente manera:

«El 'Infinitum creatum o Transfinito' [...] es afirmado en todas las partes donde en la Natura creata [naturaleza creada] es necesario constatar un infinito-actual, como por ejemplo en relación, según mi firme convicción, con el número actual-infinito de los seres particulares creados tanto en el universo como ya en nuestra tierra y, según toda probabilidad, incluso en cualquier

sus «diferenciales» e «integrales» dominan las sublimidades del saber y del poder. Sin embargo, el infinito potencial mismo, dondequiera que ocurra, es estrictamente hablando impensable sin un correspondiente transfinito que está en su base; pero la mayoría no llega a ser claramente consciente de esto» (CANTOR, *Briefe...*, 286).

⁵² CANTOR, *Gesammelte...*, 172.

parte extensa, por pequeña que sea, del espacio, en lo cual estoy totalmente de acuerdo con Leibniz»⁵³.

Inmediatamente después de citar a Leibniz hace Cantor referencia explícita (como justificación y explicación de su propia postura, aquí sintetizada, en relación con la presencia del infinito en la naturaleza) a la carta de enero de 1692 del filósofo alemán a Foucher. En ella Leibniz se expresa, efectivamente, sobre su opción por el infinito en la realidad, concluyendo de la siguiente manera:

«Soy de tal manera partidario del *infinito actual*, que en lugar de admitir que la naturaleza lo aborrece, como vulgarmente se dice, sostengo que ella lo pretende [l'affecte] por todas partes, para mostrar mejor las perfecciones de su autor. Así pues, creo que no existe parte alguna de la materia que no sea, no digo divisible, sino actualmente dividida, y, en consecuencia, la menor partícula debe ser considerada como un mundo lleno de una infinitud de criaturas diferentes»⁵⁴.

El hecho, pues, de que Cantor se declare «totalmente de acuerdo» con la visión que su predecesor manifiesta en esta carta acerca de lo «infinitamente pequeño» en la realidad arroja luz esclarecedora en orden a una correcta interpretación de su concepción, no ya estrictamente matemática, sino física u ontológica, de la realidad en cuanto inmersa en la infinitud, incluso en relación con «cualquier parte extensa, por pequeña que sea» de la dimensión material. Y no parece que pueda existir duda de que tanto Leibniz, al contraponer su «división *actual*» infinita de la materia o de la naturaleza a la mera «divisibilidad», como el propio Cantor, al propugnar también aquí su «infinito-actual», no están hablando en modo alguno del infinito *potencial*, sino bien diáfano del «infinito actual».

Cantor adjudica, además, ya en sus *Grundlagen*, a sus números un estatuto epistemológico que no se reduce a una mera subjetividad interna o abstracta sino que está de algún modo en relación con la realidad misma. Esto ocurre para él de dos maneras que se complementan y mutuamente se implican. La primera tiene

⁵³ CANTOR, *Gesammelte...*, 399 (el mismo texto en CANTOR, *Briefe...*, 254). Sólo un mes más tarde, en carta a Eulenburg de 28 de febrero de 1886, Cantor pone como «tercer ejemplo» de su «infinito actual» el de «la totalidad [Gesamtheit] de todas las mónadas, estrictamente imaginables a la manera de puntos, las cuales contribuyen al fenómeno de un cuerpo natural presente como elementos constitutivos» (CANTOR, *Gesammelte...*, 404). En este contexto, el 3 de noviembre de este mismo año dirige Cantor al matemático Axel Harnack la siguiente consulta: «Me *agradaría* mucho que me dijese qué contradicciones ha encontrado usted en el pensamiento de la existencia concreta de un infinito actual, por ejemplo de un *conjunto* [*Menge*] *infinito actual* de pequeñas partículas [...] en un *espacio finito*. Si no recuerdo mal, [...] pone usted especialmente de relieve que este pensamiento adolece de contradicciones; pero no dice usted en qué consisten estas últimas» (CANTOR, *Briefe...*, 267). El texto parece dar a entender que Cantor no está de acuerdo con la existencia de tales contradicciones, sobre todo si se tiene en cuenta que en la aducida carta de enero de este mismo año se mostraba partidario de la existencia del infinito actual «en cualquier parte extensa, por pequeña que sea, del espacio».

⁵⁴ LEIBNIZ, G. W., *Die philosophischen Schriften* (ed. C. J. Gerhardt), Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1960ss), I, 416.

su base en el hecho de que «nos es lícito considerar los números enteros como reales [wirklich] en cuanto que [...] ocupan un lugar perfectamente determinado en nuestro entendimiento, se diferencian muy bien de los demás elementos de nuestro pensamiento, poseen determinadas relaciones con éstos y modifican por tanto de una manera determinada la sustancia de nuestro espíritu». A este «modo de realidad de nuestros números» lo denomina su «*realidad intrasubjetiva*» o «*inmanente*». Pero nuestro matemático-filósofo añade todavía un segundo modo de relación de los números con la realidad. «A los números —nos dice seguidamente— se les puede atribuir también realidad [Wirklichkeit] en cuanto que necesariamente han de ser considerados como expresión o imagen de procesos y relaciones existentes en el mundo exterior, que es distinto del entendimiento, y también en cuanto que las distintas clases de números [...] son representantes de potencias [Mächtigkeiten] que se dan de hecho en la naturaleza corporal y espiritual. A este segundo modo de realidad lo denomino la *realidad transsubjetiva* o también *transeúnte* [*transiente*] de los números enteros»⁵⁵.

Cantor parece que tiende así a superar la tradicional y sobre todo cartesiana dicotomía entre la dimensión interna o pensante del sujeto (la que obviamente es fácil percibir en la elaboración matemática) y la denominada realidad «exterior». Según el segundo aspecto de la relación de los números con la «realidad», puesto de relieve por Cantor, éstos no serían, pues, sino un modo de «expresarse» la realidad misma, aquella que llamamos «exterior», en lo que denominamos «mente». Y a esto parece aludir también, al menos veladamente, Cantor en el comentario que formula a continuación del establecimiento de las dos mencionadas maneras de «realidad» de los números:

«Teniendo en cuenta la fundamentación enteramente realista, pero al mismo tiempo no menos idealista, de mis consideraciones, no tengo la menor duda de que estos dos modos de realidad se conjuntan mutuamente siempre en el sentido de que un concepto calificable desde el primer punto de vista como existente posee también, desde determinados e incluso infinitos respectos, una realidad transeúnte [*transiente*], cuya comprobación constituye en general una de las tareas más trabajosas y difíciles de la metafísica, que las más de las veces hay que dejar confiadas a aquellos tiempos en los que el desarrollo natural de alguna de las restantes ciencias revele el significado transeúnte [*transiente*] del concepto en cuestión»⁵⁶.

En consecuencia, y en continuidad con estas ideas expuestas en sus *Grundlagen*, aludirá posteriormente Cantor, de una u otra forma y en diversas ocasiones, por ejemplo en su carta a K. Lasswitz de 15 de febrero de 1884, a la «importancia física» del transfinito (en contra de la opuesta opinión de Wundt)⁵⁷.

⁵⁵ CANTOR, *Gesammelte...*, 181. Cantor alude en ocasiones a Platón o a Spinoza (Cf. *Íd.*, o. c., 206) como ámbito ideológico con el que están relacionadas sus reflexiones sobre la conexión entre el mundo de lo «exterior» (o de las «cosas») y el de las «ideas». Para él tal conexión «tiene su específica fundamentación en la *unidad del todo*, al que nosotros mismos co-pertenece» (*Íd.*, o. c., 182). Cf. PURKERT, *Georg Cantor...*, 109.

⁵⁶ CANTOR, *Gesammelte...*, 181.

⁵⁷ Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 391. Cf. CANTOR, *Briefe...*, 181.

Asimismo, en la carta de 22 de enero de 1886 al cardenal Franzelin, le expresará su convencimiento de que «la aceptación del transfinito en la *natura naturata* hace posible una mejor, dado que más perfecta, explicación de los fenómenos, especialmente los de los organismos y los de las manifestaciones psíquicas, que la hipótesis contraria»⁵⁸. Y sólo poco después, apoyándose ya además en consideraciones filosófico-teológicas (a las que todavía me referiré luego más detenidamente), mostrará su adhesión a la *realización* de su transfinito en el mundo, un mundo que no es, por tanto, meramente «finito»:

«El transfinito —indica en carta de 28 de febrero de 1886 dirigida a Eulenburg— ocupa no sólo la amplia dimensión de lo posible en el conocimiento de Dios, sino que presenta también un rico y siempre creciente campo de investigación ideal y, según mi convencimiento, alcanza su realidad y existencia, en un cierto grado y en diferentes respectos, también en el mundo de lo creado, para expresar la grandeza del Creador, según su absolutamente libre designio, de manera más intensa que lo que hubiera podido suceder por medio de un mero ‘mundo finito’»⁵⁹.

A la vista de ello, se comprende la escasa simpatía de Cantor respecto de determinadas concepciones sobre la «finitud» de nuestro entendimiento, herederas todas ellas inmediata o mediatamente del modo de pensar de Kant. Para Cantor es justamente el coherente tratamiento matemático del infinito, de su «transfinito», lo que pone en cuestión tales visiones del conocimiento, ancladas epistemológicamente en la simple «finitud». En sus *Grundlagen* se enfrenta, de manera clara y directa, a tal modo de pensar con estas relevantes reflexiones:

«Con frecuencia se aduce la finitud del *entendimiento* humano como como razón de que únicamente son pensables los números finitos. Veo, sin embargo, en tal afirmación el ya aludido razonamiento circular. Con la ‘finitud del entendimiento’ se quiere significar tácitamente, en efecto, que su capacidad respecto de la formación de los números está limitada a los números finitos. Ahora bien, si se muestra que el entendimiento puede también en un determinado sentido definir y diferenciar entre sí números infinitos, es decir, *supra-finitos*, entonces o hay que darle a las palabras ‘entendimiento finito’ un sentido amplio, a tenor del cual no se puede deducir por tanto de ellas la anterior conclusión, o hay que concederle también al entendimiento humano el predicado ‘infinito’ desde determinados puntos de vista, lo cual es a mi modo de ver lo único correcto. Las palabras ‘entendimiento finito’, que con tanta frecuencia se oyen, no son, tal como yo creo, en modo alguno verdaderas: por limitada que sea en verdad la naturaleza humana, hay *mucho* sin embargo de infinito adherido a ella, y pienso incluso que si ella misma no fuese en muchos respectos infinita no sería explicable la firme confianza y certeza respecto del ser del Absoluto, en la que todos nos sentimos unánimes. Y de manera especial sostengo yo la opinión de que el entendimiento finito tiene una estructura ilimitada [unbe-

⁵⁸ CANTOR, *Gesammelte...*, 400. Cf. CANTOR, *Briefe...*, 255.

⁵⁹ CANTOR, *Gesammelte...*, 405-406. En carta de 5 de octubre de 1888 a P. Tannery decía sobre sí mismo Cantor: «En contraposición con Aristóteles y sus seguidores, sostengo en su máxima amplitud la *realidad del infinito actual in natura* [en la naturaleza], al que denomino *transfinito*» (CANTOR, *Briefe...*, 323-324).

grenzte] para la gradual formación de clases enteras de números, que están en una determinada relación con los infinitos modos [Modis] y cuyas *potencias* son de intensidad creciente»⁶⁰.

En estas sus reflexiones se apoya sin duda cuando en carta posterior de 15 de febrero de 1884 a K. Lasswitz indica a éste que «no es lícito calificar al transfinito como ‘transcendente’ [‘transcendent’] (es decir, como excediendo las capacidades intelectivas humanas)»⁶¹.

Como se ve, es la fáctica relación cognoscitiva del entendimiento humano con el «transfinito» la que pone en cuestión la indiferenciada afirmación de la simple limitación o «finitud» de sus capacidades cognoscitivas. De aquí que Cantor indique que el «infinito actual» puede «ser concebido por el conocimiento humano en la forma de *números infinitos-actuales* o [...] *transfinitos* o en la forma todavía más general de los *infinitos tipos de orden*»⁶².

De hecho, Cantor no dejó de relacionar en este contexto sus «transfinitos» con la reflexión de la filosofía y de la metafísica acerca de la existencia de un fundamento último de la realidad. Un fundamento que él admite y que le sirve de algún modo también de apoyo para la legitimidad de sus «transfinitos». Así, en su polémica contra los detractores del «infinito actual», acusa a éstos de «*miopía*» por no ser capaces de «ver» tal infinito, «aun siendo así que él [el infinito actual] en su supremo y absoluto portador nos ha creado y en sus formas secundarias, transfinitas, por todas partes nos rodea e incluso él mismo habita en nuestro espíritu»⁶³.

Ya aquí se advierte una importante diferenciación en el seno mismo del concepto del «infinito actual» que lo hace suficientemente flexible para poder hacer referencia por medio de él a los conjuntos numéricos infinitos, a la naturaleza, al entendimiento, etc. o al mismo fundamento de todo, a la divinidad, aunque naturalmente tal referencia o aplicación no pueda realizarse de manera unívoca o uniforme.

Ahora bien, referirse a la divinidad como «infinito actual», como la verdadera y radical infinitud en acto, no constituía ciertamente problema a estas alturas de la reflexión filosófica. Sí lo era, en cambio, y lo había sido a lo largo de la reflexión histórica sobre el infinito, la consideración de realidades no divinas como de algún modo «infinitas», por más que se las considerase como procedentes de la divinidad. Debido a ello, se esfuerza Cantor en poner de relieve que el infinito actual o, tal como aquí lo denomina, el «*infinito-acabado*» (*Vollendetunendliche*) no se «identifica» sin más con el «*absoluto*» (*Abso-*

⁶⁰ CANTOR, *Gesammelte...*, 176-177. En carta a R. Lipschitz del 19 de noviembre de 1883 (el mismo año de la publicación de su obra *Grundlagen*, a la que pertenece el texto precedente) se refiere Cantor al «entendimiento humano» como «denominado ‘finito’» (CANTOR, *Briefe...*, 149). Las cursivas son de Cantor y parecen poner el acento, paralelamente con el texto aducido, en la improcedencia o ambigüedad de tal denominación.

⁶¹ CANTOR, *Briefe...*, 181.

⁶² CANTOR, *Gesammelte...*, 372.

⁶³ CANTOR, *Gesammelte...*, 374-375.

luten), con lo «divino» (*Göttlichen*), dada la «distancia» del mismo con respecto a éste⁶⁴. Se puede y debe, pues, según Cantor, hablar de una «infinitud» que ni se identifica con la divina ni con la infinitud del llamado «infinito potencial», al que Cantor denomina frecuentemente «impropio». Entre ambas infinitudes, si así se puede hablar, estaría la cantoriana infinitud del «transfinito». En este sentido habla Cantor, en carta a Aloys Schmid de 26 de marzo de 1887, de la «defectuosidad de las definiciones del infinito procedentes de Aristóteles (o de filósofos todavía más antiguos), que o se acomodan al infinito potencial o únicamente al absolutamente perfecto en Dios, pero que no toman suficientemente en consideración el infinito que denomino transfinito»⁶⁵.

Así pues, para Cantor es lícito hablar de «infinito actual» en tres distintos sentidos: «en primer lugar, en cuanto que está en el Dios extramundano, eterno, omnipotente, es decir, en la natura naturante, en donde se denomina el Absoluto; en segundo lugar, en cuanto que se da en lo concreto, es decir, en la natura naturata». El tercer sentido, que añade seguidamente todavía Cantor, es el anteriormente ya mencionado del infinito actual «en cuanto puede ser concebido por el conocimiento humano en forma de números infinitos-actuales o transfinitos [...] o en la forma todavía más general de los infinitos tipos de orden»⁶⁶.

Es sobre todo en este tercer modo de «infinito actual» en el que Cantor como matemático se centrará lógicamente de manera especial, en cuanto que tal modo de infinitud puede ser visto como manifestación concreta en la inteligencia humana del segundo modo de infinito actual, el que se da en general en la «natura naturata», es decir en la realidad no divina. Ya sabemos que entre ambos modos de infinito actual, el segundo y el tercero, existe en Cantor una estrecha conexión. Debido quizá justamente a esto último, al año siguiente (1887) volverá a referirse de nuevo a esta su triple concepción del infinito actual, pero simplificándola de alguna manera, al englobar ya explícitamente el segundo y tercer modo de infinito actual en la común denominación de «transfinito», con lo que la aludida mutua conexión entre ambos queda así más explícitamente expresada.

Cantor describe ahora, en efecto, los tres modos de «infinito actual» de la siguiente manera: «en primer lugar, en cuanto está realizado en la suma perfección, en el ser totalmente independiente, extramundano, en Dios, en donde lo denomino absolutamente infinito o, brevemente, absoluto; en segundo lugar, en cuanto está representado en el mundo creado, dependiente; en tercer lugar, en cuanto puede ser concebido en abstracto por el pensamiento como magnitud matemática, como número o tipo de orden. En los dos últimos modos, en los que claramente se manifiesta como un infinito actual limitado [beschränktes], capaz todavía de un aumento mayor y aún en cuanto tal a lo

⁶⁴ Cf. CANTOR, *Briefe...*, 148-149.

⁶⁵ CANTOR, *Briefe...*, 282.

⁶⁶ Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 372.

finito, lo denomino *transfinito* y lo contrapongo de la manera más estricta al *absoluto*»⁶⁷.

Mientras que Cantor considera que el primer modo de «infinito actual» es de la especial incumbencia de la «teología especulativa», los modos segundo y tercero del mismo, es decir, el «transfinito», pertenecen a la «metafísica» y a la «matemática», «en las que —añade aquí Cantor en 1887— me ocupó preferentemente desde hace años»⁶⁸.

Por consiguiente, en la concepción cantoriana del «transfinito» no puede en principio surgir sospecha alguna de una posible confusión del mismo con la divinidad, puesto que la explícita terminología lo impide. En cualquier caso, Cantor se expresó en distintos momentos y de diversas maneras sobre su neta diferenciación o contraposición.

Así, por ejemplo, en relación con el término «absoluto» como algo diferente del término «propio» con el que suele calificar Cantor a su «infinito actual», dirá éste a Wundt el 5 de octubre de 1883: «La expresión ‘absoluto’ es utilizada por usted, por lo que veo, en el mismo sentido en el que utilizo yo la expresión ‘propio’ [‘eigentlich’]. Yo utilizo, por el contrario, la palabra ‘absoluto’ únicamente para lo que *no* puede ser *agrandado* o *perfeccionado más*, en analogía con el ‘absoluto’ en la metafísica. Mis números propiamente infinitos o, si usted lo prefiere, mis números transfinitos ω , $\omega + 1$, ... no son ‘absolutos’, ya que, aunque no son finitos, son capaces sin embargo de aumento. Lo absoluto no es, en cambio, capaz de aumento alguno y es también por ello inaccesible para nosotros»⁶⁹.

A esta diferencia entre el «transfinito» no divino y el «absolutamente infinito» de la divinidad, basada en que la «capacidad de aumento» es exclusiva

⁶⁷ CANTOR, *Gesammelte...*, 378. Es justamente sobre la base de estas precisiones o consideraciones como Cantor puede comentarle, por ejemplo, a su interlocutor I. Jeiler, en carta a éste de 20 de mayo de 1888: «Yo *no* he afirmado que un *transfinito* sea sólo acto [Act]; el *transfinito* es también *en cierto sentido potencia* [Potenz], *en cuanto que es aumentable*; sólo lo *Absoluto* es *actus purus* o más bien *actus purissimus*» (Cf. TAPP, *Kardinalität...*, 417). Algo similar le comunica Cantor algunos días después (2 de junio de 1888) a Heman (Cf. TAPP, *Kardinalität...*, 382). Pero, sin embargo, el *transfinito* no puede ser subsumido debido a ello, tal como lo pretende todavía años más tarde el mencionado Jeiler en diálogo epistolar con Cantor, bajo el concepto de «*infinito potencial*». Cantor le responde, en efecto, en carta de 23 de septiembre de 1895 en los términos siguientes: «De la misma manera que en la dimensión de lo *finito* no existe un máximo [Ein Maximum], así tampoco existe en el *transfinito* un modo [Modus] que no estuviera englobado en otros modos *transfinitos* respecto de los cuales se comporta únicamente como ‘parte’. Si usted en referencia a este hecho dice: ‘*todo transfinito está in potentia* [en potencia] respecto de un *actus* [acto] superior y por lo mismo es algo potencial’, entonces *no hay nada que objetar a ello*. Porque *actus purus* [acto puro] es sólo Dios [...] Sin embargo, el *transfinito* no puede ser considerado como una subclase de lo que ordinariamente se denomina ‘*infinito potencial*’. Porque este último *no* es (como todo *transfinito* individual y en general como toda cosa que se corresponde con una ‘*idea divina*’) algo *en sí mismo determinado*, *fijo* e *inmutable*, sino que es algo *finito en estado de cambio*, algo que por tanto en cada uno de sus situaciones actuales tiene una *magnitud finita*» (Cf. TAPP, *Kardinalität...*, 427-428).

⁶⁸ Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 378.

⁶⁹ CANTOR, *Briefe...*, 139.

del primero y totalmente ajena al segundo, se refiere Cantor en diversas ocasiones⁷⁰.

A Gutberlet concretamente le criticará precisamente en este sentido su incorrecta visión del concepto de «magnitud infinita» como implicando para Gutberlet la «exclusión de toda posibilidad de aumento», dado que tal exclusión es para Cantor sólo verdad «en relación con lo absolutamente infinito»⁷¹. De aquí que en carta a Eulenburg de 28 de febrero de 1886 se vea en cierto modo «precisado» —tal como dice— a realizar una que él mismo denomina «*fundamental distinción*», consistente en unir o identificar «infinito actual aumentable [Ver-mehrbares]» y «*transfinito*», por una parte, e «infinito actual no-aumentable» y «*Absoluto*», por otra, comentando seguidamente sobre los mismos y sobre la mutua relación del primero con el segundo:

«El *transfinito* con su profusión de configuraciones y formas hace necesariamente referencia a un *Absoluto*, a lo 'verdaderamente infinito', respecto de cuya magnitud no puede tener lugar ningún tipo de aumento o disminución y que por ello ha de ser visto cuantitativamente como el máximo *absoluto*. Este último sobrepasa en cierto modo la capacidad humana de comprensión y se sustrae concretamente a la determinación matemática»⁷².

Y por si esto no fuera todavía suficiente para poner de relieve la incomparable eminencia del absoluto máximo de la divinidad respecto del «transfinito», Cantor, ya en su madurez y en carta dirigida a Grace Chisholm-Young de 20 de junio de 1908, escribía:

«Nunca he partido de un 'Genus supremum' ['género supremo'] del infinito actual. Todo lo contrario. He demostrado estrictamente que no existe de ninguna manera un 'Genus supremum' del infinito actual. Lo que está sobre todo finito y transfinito no es un 'Genus'; es la unidad única, totalmente individual, en la que todo está, que todo lo abarca, el 'absoluto', inconcebible para el entendimiento humano, en modo alguno sometido por tanto a la matemática, inmedible, el 'ens simplicissimum' ['ente simplicísimo'], el 'Actus purissimus' ['acto purísimo'], el cual es denominado 'Dios' por muchos»⁷³.

⁷⁰ Concretamente, por ejemplo, en su correspondencia con el ya mencionado I. Jeiler, bien sea en la carta que le escribe el 20 de mayo de 1888 (Cf. TAPP, *Kardinalität...*, 413) o, posteriormente, en la del 23 de septiembre de 1895, en la que le dice: «Cuando hablo del 'transfinito', no me refiero al absolutamente-infinito [Absolut-unendliche], el cual en cuanto actus purus [acto puro] y ens simplicissimum [ente simplicísimo] no es aumentable ni disminuible y sólo existe in Deo [en Dios] o, más bien, como [als] Deus optimus maximus [Dios óptimo máximo]» (Cf. TAPP, *Kardinalität...*, 426).

⁷¹ Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 394.

⁷² CANTOR, *Gesammelte...*, 405. En línea con lo dicho aquí, sostenía Cantor en carta de 3 de febrero de 1884 a K. Lasswitz que «lo Absoluto, es decir, lo absolutamente máximo (o Dios) [...] sólo puede ser determinado [determinirt] por sí mismo, pero no por nosotros» (CANTOR, *Briefe...*, 174).

⁷³ CANTOR, *Briefe...*, 454. Otros pasajes en los que se expresa la crítica cantoriana a la indebida confusión entre el «transfinito» y el *absolutamente* infinito de la divinidad pueden verse en CANTOR, *Gesammelte...*, 375, 391 (Cf. CANTOR, *Briefe...*, 181).

Más allá de lo puramente anecdótico o meramente histórico, el breve pero significativo intercambio epistolar de Cantor con el cardenal Franzelin en torno a la mencionada diferenciación, en el contexto del «infinito actual» (o «propio»), entre el «transfinito» y la divinidad muestra también con claridad su preocupación por asegurarse de la corrección o legitimidad de sus propias ideas al respecto.

En efecto, Cantor le envía al cardenal un adelanto de su trabajo o «breve artículo» que lleva como título «Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche», en el que se contiene la ya más arriba mencionada idea suya de la «triple» concepción del «infinito actual» (en la que el «transfinito» y el infinito actual de la divinidad forman parte, por así decirlo, de la comprensión del mismo). En la carta que acompaña a este envío (de 17 de diciembre de 1885) Cantor indica a su destinatario que le «alegraría» que esta su idea «fuese también sometida a examen por parte de los filósofos católicos», indicando asimismo a Franzelin que espera y sospecha de él que su postura no será «incondicionalmente de rechazo» respecto de la misma⁷⁴.

Una semana después Franzelin responde al envío de Cantor en relación con su mencionada concepción de la manera siguiente:

«[...] Lo que me ha alegrado mucho es que usted parece adoptar una postura no hostil, sino incluso favorable respecto del cristianismo y de los principios católicos [...] Por mi parte, poco me puedo dedicar ahora a controversias metafísicas; debo decir, sin embargo, que lo que el autor denomina 'Transfinitum in natura naturata' no se puede, según mi opinión, defender e implicaría en un cierto sentido, que el autor sin embargo no parece darle, el error del panteísmo»⁷⁵.

Cantor habrá de aclararle ahora a Franzelin que la sospecha de éste de que el «transfinito» en la naturaleza creada pueda conducir al panteísmo no es justificada. En tal sentido le responde seguidamente el 22 de enero de 1886:

⁷⁴ Cf. CANTOR, *Briefe...*, 252. En relación con esta referencia de Cantor a los «filósofos católicos», conviene indicar que Cantor, aunque oficialmente protestante, mantuvo abundante correspondencia epistolar con teólogos católicos, cuyo número predomina con gran diferencia frente a los protestantes entre sus destinatarios. Y predominan claramente, a su vez, entre los teólogos católicos los jesuitas sobre los demás. Datos más concretos sobre esto pueden leerse en la monografía de TAPP, *Kardinalität...*, 28, 174. En esta obra se publica en edición crítica la correspondencia de Cantor con los teólogos católicos de su época. Presumiblemente Cantor intentaba con ello influir sobre las más selectas mentes pensantes de la época dándoles a conocer y aclarándoles su teoría del «transfinito». He aquí, en este sentido, un significativo pasaje de la carta que le escribe al jesuita A. Baumgartner el 27 de diciembre de 1893: «Realizaría usted una 'buena obra' si usted quisiera hacer algo en orden a que ocasionalmente, aunque sólo fuera durante poco tiempo, algunos de sus Padres [Patres] más jóvenes que se dedican a la metafísica fuesen enviados a mí para discutir conmigo privatissime [de manera muy privada] aquí acerca del infinito actual [...] Pues usted puede dar por descontado que a la larga el punto de vista que en esta cuestión adopta la mayoría de sus Padres [Patres] (pero también la mayoría de los teólogos católicos) es totalmente insostenible (Cf. TAPP, *Kardinalität...*, 263).

⁷⁵ CANTOR, *Briefe...*, 253.

«Las expresiones ‘Natura naturans’ y ‘Natura naturata’, que aparecen en mi breve artículo ‘Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche’, las utilizo en el mismo sentido que les han dado a las mismas los tomistas, de tal manera que la primera expresión se refiere a Dios como el creador que está fuera de las sustancias creadas de la nada por él y como el conservador de las mismas, mientras que la segunda hace referencia al mundo creado por él. A tenor de ello, establezco la diferencia entre el ‘Infinitum aeternum increatum sive Absolutum’, que se refiere a Dios y a sus atributos, y el ‘Infinitum creatum sive Transfinitum’ [...] Respecto del panteísmo creo, sin embargo, que con el tiempo podría ser totalmente superado, y quizá únicamente por medio de mi concepción de las cosas»⁷⁶.

La explicación de Cantor, neta en su diferenciación entre las dos maneras radicalmente distintas de entenderse la «natura», parece haberle agradado fundamentalmente a Franzelin, que le responde sin tardanza, sólo cuatro días después, el 26 de enero del mismo año, en los siguientes términos:

«De su artículo ‘Zum Problem des Aktual-Unendlichen’ deduzco, para satisfacción mía, que usted distingue muy bien entre lo absolutamente infinito y lo que usted llama el *infinito-actual* en lo creado. Dado que usted declara explícitamente al último como algo ‘*augmentable todavía*’ (naturalmente *in indefinitum*, es decir, sin poder llegar a convertirse jamás en algo que no fuese todavía *augmentable*) y lo contrapone al absoluto como algo ‘*esencialmente no aumentable*’ [...], entonces son los dos conceptos, el del absolutamente infinito y el del *infinito-actual* en lo creado o el *transfinito* esencialmente diferentes, de modo que, si se comparan ambos, sólo se le debe denominar al uno como *propriamente infinito* y al otro como *impropiamente* y *aequívoco* [de manera equívoca] infinito. Concebido de esa manera, en su concepto del *transfinito* no existe, por lo que hasta ahora veo, peligro alguno para las verdades religiosas»⁷⁷.

De los precedentes pasajes de la correspondencia entre Franzelin y Cantor se deduce, pues, claramente que éste no sólo no se sentía próximo al panteísmo, sino que consideraba que su «*transfinito*» constituía más bien una excelente base contra el mismo. De hecho, algunos años después, en carta de 21 de diciembre de 1893 al jesuita Joseph Honthelm y en nota marginal a la misma, escribía Cantor: «La teoría del *transfinito* está *muy lejos* de perturbar en sus fun-

⁷⁶ CANTOR, *Briefe...*, 254-255 (Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 399). El propio Spinoza, que utiliza, como es bien sabido, las expresiones cantorianas de «*natura naturans*» (naturaleza naturante) y «*natura naturata*» (naturaleza naturada) para referirse a Dios con la primera denominación, indica respecto de esta primera denominación, de manera similar a lo aquí dicho por Cantor: «También los tomistas han entendido por la misma a Dios» (SPINOZA, *Tratado breve*. Trad., prólogo y notas de A. Domínguez, Madrid, Alianza, 1990, p. 93). «A través de Heereboord, Bacon, Bruno, Occam, Eckhart, etc. —comenta en relación con tales expresiones el editor de este escrito de Spinoza— esa célebre distinción se remonta a los comentarios latinos de Averroes a Aristóteles [...]», añadiendo asimismo, respecto de los «tomistas» aludidos aquí por Spinoza, que «aunque S. Tomás [...] utiliza la expresión, lo hace con reservas». Cf. SPINOZA, *Tratado...*, 230.

⁷⁷ CANTOR, *Gesammelte...*, 385-386 (Cf. CANTOR, *Briefe...*, 256).

damentos la doctrina tomista. Por el contrario, en un tiempo no muy lejano mi teoría se va a *manifestar* como un *arma verdaderamente letal* contra todo panteísmo, positivismo y materialismo»⁷⁸.

De hecho, en la correspondencia de Cantor con Franzelin aflora también una problemática que conecta manifiestamente el pensamiento cantoriano con importantes reflexiones de la tradición filosófica. Me refiero a la idea de que en la realidad creada se han de mostrar de alguna manera rasgos o características de la divinidad creadora *infinita* de la que procede. En este sentido, me parece relevante y significativo que en su fundamentación del «transfinito» Cantor no haya dejado de echar mano precisamente de este tipo de argumentación.

En su carta de 22 de enero de 1886 a Franzelin argumentaba, en efecto, a favor de la admisión del «*infinitum creatum*’ como existente» con un modo de razonamiento de claras resonancias tanto brunianas como leibnizianas: «Una prueba —indica en tal sentido— procede desde el concepto de Dios y concluye en primer lugar de la suma perfección del ser de Dios a la posibilidad de creación del *transfinitum ordinatum*; seguidamente, de su infinita bondad [Allgüte] y grandeza a la necesidad [Nothwendigkeit] de la creación de hecho acaecida del transfinito»⁷⁹.

Pero en relación con la argumentación cantoriana también le surge a Franzelin la sospecha de si tal modo de razonar no pone en cuestión la «libertad» divina, con lo que la «necesidad» de la que habla Cantor podría colocarnos de nuevo en las cercanías del panteísmo. Franzelin responde, en tal sentido, a Cantor el día 26 del mismo mes con esta serie de importantes razonamientos y objeciones:

«En una cosa está usted con toda seguridad equivocado respecto de la indubitable verdad. Este error no proviene de su concepto de transfinito, sino de la deficiente concepción acerca del Absoluto. En el grato escrito que me dirige, dice usted primeramente, en efecto, de modo correcto (en el supuesto de que su concepto de transfinito no esté solamente exento de objeciones religiosas, sino que sea también *verdadero*, sobre lo cual me abstengo de emitir juicio), que una prueba procede desde el concepto de Dios y concluye en primer lugar de la suma perfección del ser de Dios a la posibilidad de creación del *transfinitum ordinatum*. En el supuesto de que su transfinito *actual* no contenga en sí ninguna contradicción, su conclusión desde el concepto de la omnipotencia de Dios a la *posibilidad de creación* del transfinito es totalmente correcta. Pero lamentablemente va usted más allá y concluye ‘de su infinita bondad y grandeza a la *necesidad* de la creación de hecho acaecida del transfinito’. Precisamente porque Dios es en sí el bien absoluto e infinito y la absoluta grandeza, a cuya bondad y grandeza nada se puede aumentar y nada les puede faltar, es la necesidad de la creación, cualquiera que ésta sea, una contradicción, y [es también] la *libertad* de la creación una perfección de Dios tan necesaria como todas sus otras perfecciones, o, mejor dicho, la perfección infinita de Dios es (según nuestras necesarias distinciones) tanto *libertad* como omnipo-

⁷⁸ Cf. TERNUS, J., *Ein Brief Cantors an P. Joseph Hontheim S. J.*: Scholastik 4 (1929) 567. Ver también CANTOR, *Briefe...*, 350.

⁷⁹ CANTOR, *Briefe...*, 255 (Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 400).

tencia, sabiduría, justicia, etc. Después de su conclusión sobre la *necesidad* de la creación del transfinito debería usted ir todavía mucho más allá. Su *transfinitum actuale* es algo aumentable; ahora bien, si la infinita bondad y grandeza de Dios exige con necesidad la creación del transfinito, se sigue, exactamente por la misma razón de la infinitud de su bondad y grandeza, la necesidad de aumento [del transfinito] hasta que no sea ya más aumentable, lo cual está en contradicción con su propio concepto de transfinito. En otras palabras: quien deduce de la infinitud de la bondad y grandeza de Dios la necesidad de la creación debe afirmar que todo lo creable está creado realmente desde la eternidad y que a la mirada de Dios no existe nada posible que su omnipotencia pudiera llamar a la existencia. Esta su desafortunada opinión sobre la necesidad de la creación será también para usted un gran obstáculo en su lucha contra los panteístas y debilitará al menos la fuerza persuasiva de sus pruebas. Me he detenido tan ampliamente en este punto porque deseo fervientemente que su agudeza se libere de un error tan funesto, en el que han caído por cierto algunos otros, incluso quienes se consideran ortodoxos»⁸⁰.

La argumentación de Franzelin es ciertamente sólida y bien elaborada, aunque en lo que se refiere al modo de pensar de Cantor seguramente no del todo pertinente. En cualquier caso, la ambigüedad del vocablo «necesidad», utilizado sin mayores precisiones por Cantor, justifica las objeciones del cardenal ante una problemática acerca de la cual existía tradicionalmente una alta sensibilidad. Cantor se apresurará, en consecuencia, a aclarar brevemente su personal punto de vista al respecto sólo tres días después, el 29 de enero de 1886, atenuando por su parte de algún modo la expresión utilizada por él, en los siguientes términos:

«Expreso a Su Eminencia mi más cordial agradecimiento por las aclaraciones de su amable escrito del 26 de enero, con las que estoy totalmente de acuerdo; ya que en la breve alusión en mi carta del día 22 de este mismo mes no era mi intención en el correspondiente pasaje hablar de una necesidad objetiva, metafísica, en relación con el acto de la creación, a la que Dios, el *absolutamente libre*, hubiera estado sometido, sino que quería referirme a una cierta necesidad subjetiva *para nosotros* de deducir de la infinita bondad y grandeza de Dios la creación de hecho *acaecida* [...] no sólo de un *finitum* ordinatum [*finito* ordenado], sino también de un *transfinitum* ordinatum [*transfinito* ordenado]»⁸¹.

Pero más allá de este breve y concentrado intercambio epistolar (de diciembre de 1885 a enero del año siguiente) entre el cardenal Franzelin y Cantor, man-

⁸⁰ Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 386.

⁸¹ CANTOR, *Briefe...*, 258 (Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 400). En un escrito posterior suyo Cantor incluirá todavía buena parte de la precedente carta de Franzelin a él, comentando a continuación: «Estoy totalmente de acuerdo con todo lo que se dice en esta carta [...]. Porque, dado que para mí la absoluta libertad de Dios estaba fuera de discusión, la 'necesidad' de la que yo hablaba en el correspondiente lugar de la carta no era entendida por mi parte como aquí se presupone y con razón se impugna» (CANTOR, *Gesammelte...*, 387). De todos modos, con posterioridad a su correspondencia con Franzelin en sus alusiones a esta temática parece advertirse en Cantor una mayor cautela en su modo de expresarse.

tuvo éste ya antes de estas fechas, y después de ellas también, un verdadero interés por fundamentar metafísicamente su visión del «transfinito». Me refiero con ello, a tenor de los análisis precedentes, a que Cantor tenía siempre presente en la mente que en la realidad creada deberán aparecer de algún modo huellas de la infinitud misma del creador.

En efecto, ya más arriba aludí a que Cantor (con anterioridad a su correspondencia con Franzelin) citaba⁸² con agrado la conocida carta a Foucher de Leibniz, en la que éste se manifestaba decididamente partidario de la presencia del «infinito actual» en la realidad creada para que de ese modo «se manifestasen mejor las perfecciones de su autor».

Pues bien, esta idea retorna una y otra vez en el pensamiento cantoriano como una constante argumentativa en relación con la aludida temática. Así, en carta a Gutberlet de 24 de enero de 1886, se refiere incidentalmente a que existen razones de peso en pro de la existencia del infinito en acto «en concreto o en la naturaleza creada», que «provienen de la omnipotencia absoluta de Dios y frente a las cuales cualquier negación de la posibilidad del ‘transfinito o infinito actual creado’ aparece como una lesión de dicho atributo de la divinidad»⁸³.

De aquí que en relación, por ejemplo, con sus conjuntos infinitos considere, en carta a Aloys Schmid de 5 de agosto de 1887, como «un dogma que amenaza la absoluta perfección del ser supremo» la tesis que sostiene «la supuesta imposibilidad de los números determinados infinitos [bestimmt-unendlichen]»⁸⁴. Significativamente, Cantor no dejará de aludir en este contexto al tradicional pasaje bíblico que determinados autores de orientación finitista acostumbraban a aducir en apoyo de la tesis por ellos defendida acerca de la imposibilidad de cualquier tipo de infinitud en la realidad creada. Me refiero al «todo lo dispusiste en medida, número [in numero] y peso» (*Sap.* XI, 20). Cantor hace precisamente referencia a este pasaje del libro de la Sabiduría, en carta de 1 de febrero de 1896 al dominico Thomas Esser, bien consciente de la utilización que se había hecho del mismo en pro de la tesis contraria a la suya propia de la legitimidad de los *números infinitos*, comentando al respecto: «No se dice aquí ‘in numero finito’ [‘en número finito’]. Si, pues, los números cardinales infinitos y los tipos de orden transfinitos aparecen como no contradictorios, entonces *se hace referencia* también a ellos en dicho pasaje bíblico y no es, por tanto, lícito utilizarlo [dicho pasaje], como lamentablemente muchas veces ocurre, como argumento contra el ‘número infinito’»⁸⁵.

⁸² Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 179.

⁸³ CANTOR, *Gesammelte...*, 396.

⁸⁴ CANTOR, *Briefe...*, 298. Algunos meses antes, en carta al mismo destinatario, se mostraba contrario a la tesis de éste de que «toda magnitud creada y en general toda perfección creada deba ser en sí misma algo actualmente *finito* [actu *finitum*]» (CANTOR, *Briefe...*, 282). De modo que para Cantor «finitud» y «creaturidad» no son conceptos absolutamente (y sin más precisiones) idénticos entre sí o intercambiables.

⁸⁵ Cf. *Das Problem des Unendlichen. Mathematische und philosophische Texte von Bolzano, Gutberlet, Cantor, Dedekind* (hrsg. von H. Meschkowski), München, Deutscher Taschenbuch Verl., 1974, p. 126. En realidad, Cantor había ya aludido a este pasaje bíblico diez años antes

A la vista de todo ello, no puede ya resultar extraño que Cantor en su rechazo del tradicional adagio, de proveniencia aristotélica, «*infinitum actu non datur*» («no se da el infinito en acto»), se considere en cambio a sí mismo afín en cierto modo al Cusano y a Bruno⁸⁶.

Cantor no consideró, tal como se ve, la dimensión filosófica o metafísica (e incluso teológica) como algo ajeno o adherido de manera meramente externa a su investigación matemática sobre los conjuntos infinitos, aun a sabiendas de que tal modo de proceder no gozaba de la aprobación o las simpatías de sus colegas ni, en general, de los científicos. A ello viene a aludir, por ejemplo, al inicio de la carta que dirige el 28 de febrero de 1886 al doctor en medicina Eulenburg: «De su escrito del 23 de este mes deduzco con agrado que usted muestra interés en el objeto de mis investigaciones, por lo que mi agradecimiento a usted es tanto mayor cuanto más escasos son quienes de entre los científicos y médicos importantes se interesan por el mismo; pues en estos círculos el que yo llamo ‘horror infiniti’ [‘horror al infinito’] es en general, por múltiples razones y en los más diversos contextos, un mal profundamente arraigado»⁸⁷.

Frente a tal prejuicio, Cantor se interesó cada vez más intensamente por engarzar sistemáticamente su trabajo matemático con la reflexión filosófica y teológica. En este sentido, en carta de 24 de enero de 1894 al matemático francés Charles Hermite, se expresaba significativamente de la siguiente manera: «Hace ya más de veinte años (desde el Concilio Vaticano) que, en el dominio del espíritu, no son ya las matemáticas el único interés y, menos todavía, el amor esencial de mi alma. La metafísica y la teología, quiero confesarlo abiertamente, se han apoderado en tal grado de mi alma que me resta relativamente poco tiempo para mi *pasión* [*Flamme*] *primera*»⁸⁸.

Hay incluso constancia, en relación con esto, de que Cantor, efectivamente, después de la publicación de sus *Grundlagen* (1883), manifestó el 20 de octubre

en su carta al cardenal Franzelin de 22 de enero de 1886 en términos muy similares: «Creo que las palabras de la Sagrada Escritura [...] ‘*Omnia in pondere, numero et mensura disposuisti*’, acerca de las cuales se ha supuesto que están en contradicción con los números infinitos actuales, no tienen este sentido; ya que, en el caso de que hubiera, tal como creo haber demostrado, ‘potencias’ [*Mächtigkeiten*], es decir, números cardinales, actualmente infinitos y ‘números de conjuntos bien ordenados’, es decir, números ordinales, actualmente infinitos [...], entonces en dicho pasaje sagrado se estaría haciendo también referencia de manera bien segura a estos números transfinitos y no es lícito en consecuencia, a mi modo de ver, considerar tal pasaje como argumento contra los números infinitos actuales, si no se quiere caer en un razonamiento circular» (CANTOR, *Gesammelte...*, 399-400. Cf. CANTOR, *Briefe...*, 254-255).

⁸⁶ «Encuentro —dice Cantor— en la filosofía de Nicolás de Cusa puntos de contacto para mis concepciones [...] Advierto lo mismo en relación con Giordano Bruno, el sucesor del Cusano» (CANTOR, *Gesammelte...*, 205).

⁸⁷ CANTOR, *Gesammelte...*, 400. Puede leerse también en similar sentido lo que Cantor le escribe a I. Jeiler el 20 de mayo de 1888 en relación con el poco interés en general de los «matemáticos modernos» por la fundamentación de sus propias adquisiciones teóricas (una fundamentación que para él no puede realizarse al margen de su teoría del «transfinito») en TAPP, *Kardinalität...*, 414.

⁸⁸ CANTOR, *Briefe...*, 350. Cantor habla en su carta a Hermite de la matemática como «*mon premier amour*» («mi primer amor») (*ibid.*).

de 1884 a G. Mittag-Leffler su deseo de dedicarse a la filosofía y abandonar las matemáticas y de que comenzó también de hecho a enseñar filosofía en Halle en el primer semestre del curso 1884/1885, aunque al parecer, y afortunadamente para sus investigaciones matemáticas, con poco éxito, tal como se deduce (en lo que a este último punto se refiere) de lo que acerca de Cantor le informa Sofía Kowalevski a G. Mittag-Leffler el 21 de mayo de 1885⁸⁹.

Pero es, sobre todo, en la ya mencionada carta al dominico Th. Esser del 1 de febrero de 1896 en donde Cantor parece dedicar una mayor atención a lo que en nuestros días denominaríamos interdisciplinariedad, es decir, la mutua conexión reflexiva o sistemática entre, concretamente, la filosofía, la teología y las ciencias. Cantor se refiere en esta carta, en efecto, en primer lugar, al «lazo indestructible que une la metafísica con la teología», por el que la primera es iluminada por la segunda, así como ésta por su parte «precisa para su presentación y desarrollo científico de toda la filosofía»⁹⁰. Aludiendo a textos del Concilio Vaticano I y de Tomás de Aquino, Cantor pone de relieve la importancia del intento de pensar la divinidad desde la grandeza infinita que le compete y, en consecuencia, de pensar también la realidad creada de tal manera que no obstruya la correcta visión de la divinidad, dado que «cualquier error en la metafísica implica siempre el máximo peligro de deslizarse a la dimensión teológica y provocar aquí un daño todavía mayor»⁹¹. Pero Cantor analiza también, en segundo lugar, la relación que tiene la metafísica con la matemática y las demás ciencias en los términos siguientes:

«Existe asimismo una relación análoga a la existente entre teología y metafísica también entre esta última, por un lado, y la matemática y las otras ciencias, por el otro. La fundamentación de los principios de la matemática y de la ciencia le compete a la metafísica; ésta ha de considerar por ello a aquéllas como hijos suyos y también como servidores y colaboradores, a los que a ella no le es lícito perderlos de vista, sino que ha de vigilarlos y controlarlos siempre»⁹².

Ahora bien, para Cantor esta función de la metafísica respecto de la matemática o las ciencias no la convierte a ella en algo inmutable o inalterable, sino que ha de estar abierta y mostrarse receptiva respecto de las mismas. En tal sentido, alaba Cantor la encíclica *Aeterni Patris* de León XIII, en cuanto que «el filó-

⁸⁹ «[Cantor] comenzó en el anterior semestre a dar clase sobre la filosofía de Leibniz. Inicialmente tenía veinticinco alumnos, pero después, poquito a poco, fueron reduciéndose en total primeramente a cuatro, luego a tres, después a dos, y finalmente a uno sólo. Cantor continuó, sin embargo, con sus clases. Mas he aquí que un buen día vino el último de los mohicanos, un tanto turbado, y expresó al profesor su más vivo agradecimiento, pero le explicó que tenía tantas cosas que hacer que no podía arreglárselas para continuar con las clases del profesor. Entonces Cantor, con la indescriptible alegría de su mujer, hizo solemne promesa de no volver a enseñar jamás filosofía» (Cf. DAUBEN, *Georg Cantor...*, 312-313). Ver también Íd., *o. c.*, 159, 337 (n. 31).

⁹⁰ Cf. *Das Problem...*, 124-125.

⁹¹ Cf. *Das Problem...*, 125.

⁹² Cf. *Das Problem...*, 126. Cantor compara aquí mismo a la «metafísica» con la «reina» de las abejas (símil estas últimas de las matemática y de las demás ciencias) en una colmena.

sofo ha de preocuparse por el estudio de las ciencias (y también, consecuentemente, de la matemática, sin la que aquellas no serían en sí mismas realizables), para que la filosofía cristiana recuperada por el gran pontífice no se parezca a una momia egipcia»⁹³.

Seguidamente, en carta del día 15 del mismo mes de febrero, dos semanas después de la anterior, al mismo destinatario y en coherencia con lo ya en ésta formulado, Cantor indicará ya explícitamente que su teoría de los conjuntos infinitos «pertenece enteramente a la metafísica» y es, por tanto, una temática que posee «contenido y carácter metafísico»⁹⁴.

De hecho, relaciona directamente el descubrimiento y formulación de su teoría de los conjuntos infinitos con la reflexión de siglos anteriores en los que no existía todavía una separación tan pronunciada entre la filosofía y las ciencias. En este sentido, en carta de 27 de enero de 1900 a su «querido amigo y colega», el matemático David Hilbert, dice a éste que se le hizo «necesaria» la «profundización en el espíritu de los siglos XVI y XVII», lo que le llevó a «comprender y entender más exactamente a los *matemáticos y científicos* clásicos». «Usted —continúa diciendo a Hilbert— se extrañará de esta afirmación mía sin ponerla en duda. Ello *es* así y se apoya en estas dos consideraciones: 1) los grandes investigadores de aquellos tiempos eran casi todos *universales* y no *especialistas* [*Specialisten*], tal como ocurre *hoy*; 2) existía entre ellos una *conexión real*, de la que no tiene idea el gremio actual de los *eruditos, fragmentados como están entre sí por sus particulares especialidades*»⁹⁵.

Por lo demás, dada la estrecha e íntima relación existente entre la teología, la metafísica, la matemática y las demás ciencias, Cantor considera en 1886 que, aunque él es consciente de que su concepción de los conjuntos infinitos y de la presencia de la infinitud en el denominado mundo «finito» es algo que «habrá de esperar todavía mucho a ser reconocida de manera general sobre todo entre los *teólogos*», el conocimiento de dicha concepción por parte de éstos sería en realidad «una valiosa ayuda al servicio de la cosa (la religión) que ellos mismos representan»⁹⁶, dado que, como se expresa también al año siguiente (26 de marzo de 1887), «aceptar, reconocer y utilizar especulativamente el transfinito no está en contradicción con los grandes principios de la escolástica cristiana»⁹⁷.

En este sentido, le comunicará al matemático Hermite (el 24 de enero de 1894) que es su intención hacer un servicio a la teología, «profundizando» en

⁹³ Cf. *Das Problem...*, 126-127.

⁹⁴ Cf. *Das Problem...*, 127. Con razón se ha dicho que «Cantor ha procurado, como quizás ningún otro matemático, fundamentar también su ciencia filosóficamente» (PURKERT, *Georg Cantor...*, 105).

⁹⁵ CANTOR, *Briefe...*, 425.

⁹⁶ Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 406.

⁹⁷ CANTOR, *Briefe...*, 283. En carta de 15 de febrero de 1896 le escribe al dominico T. Esser: «Ofrezco a la filosofía cristiana por primera vez y en sus comienzos la verdadera doctrina acerca del infinito. Sé con toda certeza que ella aceptará esta doctrina. Lo único que está en cuestión es si ya ahora o después de mi muerte» (Cf. *Das Problem...*, 128).

ella y renunciando también a una «dedicación *exclusiva* a la matemática», para de este modo hacer de «puente de oro» entre la teología y las «ciencias mundanas»⁹⁸.

Podría resultar quizá un tanto extraño este interés de Cantor, en cuanto matemático y filósofo, por la temática teológica, por recabar la opinión de los profesionales de la teología y por influir asimismo en ellos en relación con su teoría del transfinito. Pero Cantor, según se ha podido ver, estaba convencido de la importancia y trascendencia de la misma no sólo para las matemáticas (cuyo posterior desarrollo debe claramente a él impulsos determinantes), sino también para la filosofía en general y para la teología. En esto seguramente no le faltaba razón, si se tiene presente la permanente suspicacia a lo largo del desarrollo histórico de la problemática de la infinitud en relación con la presencia (del modo que fuere) de ésta en la realidad mundana⁹⁹. De hecho, el finitismo aristotélico seguía manteniendo su poder de captación, en mayor o menor medida, en amplios dominios tanto de la filosofía como de la teología. Frente a ello, Cantor veía precisamente en su teoría infinitista del «transfinito» un modo de ahondar en los fundamentos de la religión y del cristianismo y de integrarlos al mismo tiempo en su propia religiosidad. A este respecto, describía en carta al cardenal Franzelin del 22 de enero de 1886 su personal postura religiosa e ideológica en los términos siguientes:

«Las circunstancias de mi nacimiento han conformado mi postura [respecto del catolicismo]; mi venerado difunto padre fue luterano, pero mi madre [...] pertenece a la iglesia católica [...] Las ideas que he ido adquiriendo a lo largo de los años no me han alejado jamás de las verdades fundamentales del cristianismo, sino que me han reafirmado más bien en las mismas; sólo en muy pequeña medida estoy en armonía con las modernas escuelas filosóficas; estoy más bien en pugna con la mayoría de ellas; no hay sistema que esté más alejado de mis convicciones principales que el panteísmo, si prescindo del materialismo, con el que no tengo nada en común»¹⁰⁰.

⁹⁸ Cf. CANTOR, *Briefe...*, 350. Desde este contexto se comprende que Joseph W. Dauben haya indicado que «la dimensión teológica de la teoría de conjuntos de Cantor, aunque quizá irrelevante para la comprensión de su contenido matemático, es sin embargo esencial para comprender plenamente esta teoría y su desarrollo» (DAUBEN, *Georg Cantor...*, 291).

⁹⁹ Sobre el conjunto de esta magna problemática de la infinitud remito a mi amplio y reciente estudio: CABADA CASTRO, M., *Recuperar la infinitud. En torno al debate histórico-filosófico sobre la limitación o ilimitación de la realidad* (Madrid, Publicaciones de la Universidad Pontificia Comillas, 2008). Puede resultar útil también a este respecto mi posterior escrito *El animal infinito. Una visión antropológica y filosófica del comportamiento religioso* (Salamanca, Editorial San Esteban, 2009).

¹⁰⁰ CANTOR, *Briefe...*, 255. En carta de 28 de julio de 1887 al protestante Friedrich Heman le comunica Cantor: «No soy católico [...], pero, como cristiano positivo, me comporto interiormente y, si es necesario, también exteriormente de manera amigable con el catolicismo» (CANTOR, *Briefe...*, 296). Oficialmente fue, pues, Cantor protestante, aunque sin atenerse a reglamentación confesional alguna, tal como le informa en marzo de 1896 a C. Pott: «En cuestiones y comportamientos religiosos mi postura *no es confesional*, ya que no pertenezco a ninguna de las iglesias organizadas existentes. Mi religión es la revelada por el Dios trino, uno y único, y mi teología se basa en la palabra y la obra de Dios, venerando además por mi parte

Dada la reconocida importancia histórica de la figura de Aristóteles como decidido impugnador del infinitismo, es comprensible, por lo demás, que Cantor hiciese no pocas veces referencia al mismo en sus escritos, criticando su rechazo del «infinito en acto» y, en tal sentido, su aversión respecto de sus antecesores infinitistas. En relación con ello comenta, en efecto:

«Las razones del Estagirita no prueban sino que los argumentos presentados por los antiguos filósofos naturales en pro de la existencia *necesaria* de un ἄπειρον ἀφωρισμένον no eran concluyentes; *pero él no demuestra la imposibilidad* de un ἄπειρον ἀφωρισμένον; en otras palabras, *no demuestra* que este concepto, si se lo concibe como *transfinito*, sea contradictorio y, en cuanto tal, le resultaría difícil, mejor dicho, imposible demostrarlo»¹⁰¹.

Para Cantor la demostración aristotélica no es, pues, realmente tal, ya que «si se atiende a las razones que presenta Aristóteles contra la existencia real del infinito [...], éstas pueden reducirse en lo esencial a un supuesto, que implica una *petitio principii*, a saber, al supuesto de que solamente hay números *finitos*, lo cual era deducido por él del hecho de que a él solamente le eran conocidas numeraciones en cantidades finitas»¹⁰².

Bien distinta de la aristotélica es naturalmente para Cantor la actitud de Agustín respecto de la infinitud y, concretamente, en relación con la infinitud de los números. Es bien sabido, en efecto, que Agustín afirmaba la infinitud de los números en su totalidad infinita y al mismo tiempo que tal «infinitud del número, aunque no exista número de los números infinitos, no es incomprendible para Aquel cuya inteligencia no tiene número»¹⁰³. Se comprende, por tanto, el interés de Cantor por estas reflexiones agustinianas sobre el número y la «gran importancia»¹⁰⁴ que él les concede al aludir explícitamente a ellas y comentarlas asimismo detenidamente, llegando a concluir de la manera siguiente:

«El *transfinito* no puede ser más enérgicamente requerido ni ser más perfectamente fundamentado y defendido que lo que aquí ocurre en Agustín. Porque que en el conjunto infinito (v) de todos los números enteros finitos v no se trata del absolutamente infinito no lo pondrá nadie en duda. Al afirmar,

como preceptores míos *principalmente* a los padres apostólicos, los padres de la iglesia y los más distinguidos doctores de la iglesia de los *primeros quince siglos* [...] No pertenezco a *ninguna asociación, sociedad secreta o iglesia, en la que un mortal estuviera por encima de mí o tuviera algo que ordenarme. Sólo ante Dios soy responsable*» (Cf. PURKERT, *Georg Cantor...*, 119).

¹⁰¹ CANTOR, *Gesammelte...*, 396.

¹⁰² CANTOR, *Gesammelte...*, 174. Cantor no deja de reconocer, con todo, la valía y trascendencia histórica de la figura del Estagirita, al comentar en relación con su diferenciación entre el infinito «potencial» y el infinito «actual»: «Aristóteles, al que considero, pese a sus muchos errores (que en él se encuentran y que, en virtud de su gran autoridad, se han mantenido en parte hasta nuestros días), como *el máximo pensador y sabio* entre todos *cuantos han existido*, interpretó naturalmente en general de manera equivocada esta diferenciación y cometió u originó, en particular, el *gran error* según el cual el infinito categoremático o actual no tiene existencia o realidad» (CANTOR, *Briefe...*, 211).

¹⁰³ Cf. *De civ. Dei* XII, 18.

¹⁰⁴ CANTOR, *Gesammelte...*, 401.

pues, Agustín la percepción intuitiva total del conjunto (v) [...], reconoce simultáneamente este conjunto *formaliter* como un todo actualmente infinito, como un *transfinito*»¹⁰⁵.

Respecto de Tomás de Aquino, Cantor se refiere a él en diversas ocasiones, si bien considerándolo fundamentalmente afín a la postura contraria a la admisión del infinito en acto, más concretamente, del «infinito creado»¹⁰⁶. Cantor alude, en efecto, a determinados pasajes significativos de la obra del Angélico, en los que éste rechaza el infinito en acto «según la multitud» y paralelamente sostiene que «ninguna especie de número es infinita»¹⁰⁷. Pues bien, al menos en dos ocasiones¹⁰⁸ se refiere Cantor a los pasajes centrales del artículo 4 de la citada obra tomasiana, en los que se razona tanto sobre la aludida imposibilidad de una especie de número «infinita» como sobre la necesidad de que la creación esté ordenada o dispuesta «según un determinado número», añadiendo por su parte el siguiente significativo comentario a ambos razonamientos tomasianos:

«Son éstos los razonamientos de más peso que en el correr de los tiempos se han formulado contra el transfinito [...] Ambos razonamientos están muy bien fundamentados y sólo pudieron ser positivamente anulados y contestados después de haberse probado y mostrado que los números transfinitos y los tipos de orden en la dimensión de lo posible existen lo mismo que los números finitos y que en el transfinito existe y en cierta manera está almacenada una riqueza incluso mucho mayor en formas y en 'species numerorum' ['especies de números'] que en el relativamente pequeño campo de lo finito ilimitado [*unbeschränkten Endlichen*]. Las especies transfinitas estaban, en consecuencia, a la disposición de las intenciones del creador y de su absolutamente inconmensurable fuerza de voluntad de la misma manera que los números finitos. Se podría pensar que Santo Tomás vislumbró ya esto o incluso lo conoció e intuyó y precisamente por ello desdénó hacerse eco de otros argumentos *de poco peso* contra las magnitudes y números actualmente infinitos que, entre otros, se encuentran también en los escritos de su maestro Alberto Magno. Se atuvo por su parte *muy razonablemente* a aquellos *dos importantes y relevantes* razonamientos, que sólo podían ser *positivamente* anulados, dejando gustosamente de lado los otros razonamientos con su famosa exclamación contra los 'murmuradores': '*Praeterea adhuc non est demonstratum, quod Deus non possit facere ut sint infinita actu*' (Opusc. de aeternitate mundi)»¹⁰⁹.

La alusión final de Cantor al penúltimo párrafo del opúsculo *De aeternitate mundi*, de la época más tardía o madura de Tomás de Aquino (sólo un par de años antes de su muerte), en el que se dice que «no está demostrado todavía que no

¹⁰⁵ CANTOR, *Gesammelte...*, 402. Sobre esta estrecha relación ideológica de Cantor con Agustín en lo que se refiere a la infinitud numérica y a la distinción de ésta respecto de la absoluta infinitud de la divinidad puede verse DROZDEK, A., *Beyond Infinity: Augustine and Cantor*: Laval Théologique et Philosophique 51 (1995) 132, 139.

¹⁰⁶ Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 399 (Cf. CANTOR, *Briefe...*, 254).

¹⁰⁷ Cf. S. Th. I, q. 7, a. 4.

¹⁰⁸ Cf. CANTOR, *Gesammelte...*, 403-404; ÍD, *Briefe...*, 282.

¹⁰⁹ CANTOR, *Gesammelte...*, 404.

pueda Dios hacer que existan infinitos en acto», muestra con suficiente claridad que Cantor sospechaba ya efectivamente que en Tomás de Aquino pudiera haberse dado una cierta evolución desde la previa aceptación de las tesis finitistas aristotélicas hacia una mayor apertura respecto del «infinito en acto»¹¹⁰.

La importancia que le concedía Cantor a este pasaje tomasiano viene confirmada por la recurrencia del mismo en diversos lugares de sus escritos. Así, en carta de 26 de marzo de 1887 a Aloys Schmid indica a éste, después de aducir dicho pasaje, que las palabras tomasianas mantienen «todavía hoy, después de seiscientos años, su imperecedera fuerza de verdad», advirtiéndolo al respecto que no se debería «pasar por alto el importante plural [*'infinita actu': 'infinitos en acto'*], que viene a caracterizar de lleno el infinito a que me refiero como *transfinitum*»¹¹¹. Volverá todavía, años más tarde, a aludir laudatoriamente al mismo pasaje tomasiano (en contra de la interpretación que hace de él Tilmann Pesch) en carta a J. Hontheim de 21 de diciembre de 1893: «No puedo estar de acuerdo —le dice Cantor— con el R. P. Tilmann Pesch, cuando [...] en cierto modo parece hacerle a Sto. Tomás el reproche de que en el calor de la disputa se haya precipitadamente hecho culpable de la frase contra los murmuradores: 'praeterea adhuc non est demonstratum, quod Deus non possit facere ut sint infinita actu'. Y entre los *diversos* 'infinita actu' entiende Sto. Tomás lo que yo denomino 'transfinita'»¹¹².

Con todo, a pesar de esta manifiesta aceptación de la sentencia final del mencionado opúsculo de Tomás de Aquino, Cantor mantiene una cierta discrepancia respecto de la conocida cautela del filósofo-teólogo medieval en relación con la cuestión de la posibilidad o imposibilidad de un mundo sin comienzo temporal. Como se sabe, Tomás de Aquino sostiene que no es posible probar con la sola razón el comienzo temporal del mundo; de modo que desde un punto de vista puramente filosófico o teórico no puede excluirse la posibilidad de un mundo «ab aeterno». Pues bien, Cantor muestra por una parte su aversión respecto de una concepción del mundo sin comienzo temporal, acerca de la cual

¹¹⁰ Acerca de esta evolución en el pensamiento tomasiano respecto del infinito remito al lector a las páginas que dediqué a esta cuestión en mi ya mencionado estudio *Recuperar la infinitud...*, pp. 200-221, bajo el epígrafe «La indecisa postura tomasiana respecto del infinito creado». Mi propia interpretación al respecto no deja de ser, como allí se puede comprobar, afín en buena medida a la de Cantor.

¹¹¹ CANTOR, *Briefe...*, 284. Pueden verse similares comentarios en relación con el modo de pensar de Tomás de Aquino respecto de esta cuestión en las cartas que Cantor dirige a Heman en el año siguiente (los días 2 y 21 de junio de 1888). En particular, Cantor no deja de aludir aquí sutilmente a que la tesis de Tomás de Aquino según la cual el comienzo temporal del mundo se apoya «sólo» en la fe (no siendo, por tanto, en sí misma filosóficamente demostrable) no sería en realidad «posible» o defendible si para el autor medieval estuviese perfectamente clara o probada la tesis de la imposibilidad de la infinitud actual en relación con los números o el tiempo. Ver a este respecto los pasajes correspondientes de Cantor en TAPP, *Kardinalität...*, 379-381, 383-384.

¹¹² Cf. TERNUS, *Ein Brief...*, 567. En este mismo mes de diciembre (los días 5 y 27) de 1893 comunicaba Cantor a A. Baumgartner similares interpretaciones suyas respecto de Tomás de Aquino. Ver TAPP, *Kardinalität...*, 299-300, 263-264.

es de la opinión de que pudiera estar incluso en la raíz del ateísmo o materialismo de la ciencia moderna, pero sostiene por otra, de manera coherente con su propia teoría del «transfinito», que no es lícito utilizar un tipo de demostración contra la «eternidad» del mundo que se basara en la negación de los números infinitos. En este sentido se expresa, en efecto, en su carta de 5 de agosto de 1887 a Aloys Schmid:

«Estoy totalmente de acuerdo con usted en la aceptación de un comienzo temporal del mundo. Desde siempre he considerado el opuesto dogma de la ciencia actual como algo que lesiona la sana razón en grado sumo; y es posible mostrar que con el monstruoso absurdo de un infinito tiempo transcurrido, tal como impropriamente se lo denomina, o de la eternidad del mundo o bien de su materia, están en conexión innumerables manifestaciones patológicas del tiempo moderno y de su ciencia. Entiendo y valoro, por tanto, los muchos intentos que desde siempre se han hecho en la filosofía cristiana en orden a probar por vías puramente demostrativas la finitud de la duración temporal pasada y, con ello, el comienzo de un mundo distanciado sólo finitamente del presente. Sin embargo, las demostraciones hasta ahora realizadas se apoyan, por lo que conozco, en la presunta imposibilidad de los números determinados infinitos [bestimmt-unendlichen], es decir, sobre un dogma asimismo insostenible, que amenaza la perfección absoluta del ser sumo, contra el que Sto. Tomás se enfrentó en su opúsculo *De aeternitate mundi*. Por eso [...] no puede formularse una demostración *de este tipo*, que se apoya en la supuesta imposibilidad de los números y conjuntos determinados infinitos [...] Ello no excluye en absoluto el que la finitud temporal de la creación pueda o incluso deba ser demostrada de otro modo racionalmente, si bien no de manera puramente matemática»¹¹³.

Podría resultar quizá un tanto inesperado o paradójico el que Cantor, que con razón critica aquí el que se haga uso de una equivocada concepción finitista de los números para apoyar en ella la finitud temporal del mundo, considere en cambio que su concepción infinitista del «transfinito» no debería utilizarse como apoyo de la opinión (tomasiana, concretamente) de la posibilidad de un mundo sin comienzo¹¹⁴, sino que pueda dicha concepción ser más bien prueba de lo contrario. Sin embargo, eso es lo que viene a decir, poco después, en esta misma carta: «*El hecho de los números actualmente infinitos no sólo no es una*

¹¹³ CANTOR, *Briefe...*, 298.

¹¹⁴ El mismo Cantor parece sospechar el posible surgimiento de una cierta extrañeza al respecto por parte de sus lectores cuando en la mencionada carta a J. Hontheim de 21 de diciembre de 1893, después de manifestarle a éste su personal «coincidencia» con prácticamente todas sus tesis, añade lo siguiente: «Esto es válido incluso respecto de tesis acerca de las cuales usted podría esperar lo contrario, como por ejemplo respecto de la tesis LIX: 'Nulla creatura ab aeterno esse potest' ['Ninguna criatura puede existir desde siempre']. Dicho de otra manera, yo sostengo junto con todos los filósofos cristianos no solamente el comienzo temporal de la creación, sino que afirmo también con usted que esta verdad puede ser demostrada con argumentos puramente racionales. Esta opinión no es en mí de fecha reciente [...]. El establecimiento de números infinitamente grandes o, como yo los denomino, transfinitos no tiene como consecuencia el que haya que renunciar a la demostración racional del comienzo temporal del mundo» (Cf. TERNUS, *Ein Brief...*, 566).

razón para la posibilidad de una duración infinita del mundo 'a parte ante' ['anterior'], sino que con la ayuda de la teoría de los números transfinitos puede más bien ser demostrada la necesidad de un comienzo del movimiento y del tiempo situado a distancia finita desde el presente. Dejo para otra ocasión la fundamentación detallada de esta tesis [...]»¹¹⁵.

En realidad, tal fundamentación no parece haber salido en ningún momento de la pluma de Cantor, una fundamentación «racional» que habría de ser conjuntamente «metafísica» y «matemática», según lo que él mismo viene a indicar al hablar de la posibilidad de que se pueda llegar a «formular, sobre la base de la verdadera teoría del transfinito una prueba mixta, matemático-metafísica»¹¹⁶ de la tesis del comienzo temporal del mundo, tal como se dice en la mencionada carta a Aloys Schmid de 26 de marzo de 1887.

Más acá, sin embargo, de la época medieval, con quien Cantor mostrará una mayor desavenencia teórica es comprensiblemente con Kant. Su crítica se dirige a las bases mismas del finitismo kantiano, en el que el infinito resulta ser una mera «idea» de la subjetividad pensante, no quedando lugar alguno, por tanto, para la «objetividad» o realidad de un infinito como el «transfinito» cantoriano. En este sentido y en el contexto del establecimiento de su conocida y ya analizada diferencia entre el «transfinito» y el «absoluto» se expresa Cantor crítica y desenfadadamente respecto del modo de pensar de Kant de la siguiente manera:

«Se advierte también que desde Kant adquiere carta de ciudadanía entre los filósofos la equivocada concepción de que lo *absoluto* es la frontera ideal de lo *finito*, cuando la verdad es que esta frontera sólo puede ser pensada como un *transfinito* y además como el *mínimo de todos los transfinitos* (en correspondencia con el número suprafinito *más pequeño*, denominado por mí ω). El concepto de infinitud es tratado por Kant, sin previa, seria y crítica, discusión, en su 'Crítica de la razón pura', en el capítulo sobre las 'antinomias de la razón pura', en relación con *cuatro* cuestiones, con la finalidad de proporcionar la prueba de que las mismas pueden ser *afirmadas* y *negadas* con igual rigor. Es posible que nunca se haya hecho más a favor de la desacreditación de la razón humana, aun teniendo en cuenta el escepticismo pirrónico y académico con el que Kant tiene tantos puntos de contacto, que con estos párrafos de la 'filosofía trascendental crítica'. Mostraré ocasionalmente que este autor, sólo sirviéndose de un uso *vago, no diferenciado*, del concepto de infinitud (si es que desde tales consideraciones se puede hablar todavía de conceptos) fue capaz de hacer valer sus *antinomias*, y esto sólo además entre quienes, como él, gustosamente eluden un tratamiento profundo matemático de tales cuestiones»¹¹⁷.

¹¹⁵ CANTOR, *Briefe...*, 299. En carta posterior a Heman del 21 de junio de 1888 aducirá Cantor estos párrafos escritos por él previamente en la mencionada carta a Schmid, añadiendo Cantor por su parte ahora que debido a ello no puede ser considerado él mismo en este punto como «tomista estricto», dado que no se adhiere al modo concreto de pensar de Tomás de Aquino al respecto, pues para éste el hecho del comienzo temporal del mundo «pertenece a los misterios de la fe». Ver TAPP, *Kardinalität...*, 383-385.

¹¹⁶ CANTOR, *Briefe...*, 285.

¹¹⁷ CANTOR, *Gesammelte...*, 375.

Kant carece, a juicio de Cantor, de lo que éste llama —en carta de 5 de octubre de 1883 a W. Wundt— «mi concepto intermedio» (*Mittelbegriff*), es decir, el «infinito propio» [*eigentlich Unendliche*], cuya expresión mundana (no divina) es un «transfinito» capaz de aumento o agrandamiento y que, sin embargo, en cuanto «infinito propio», no se identifica en modo alguno con el mero infinito «potencial» o «impropio»¹¹⁸.

La antipatía o alergia filosófica respecto de Kant se consolida o parece incluso aumentar con el tiempo. Significativa muestra de ello viene a ser lo que le escribe desde Londres, en donde ocasionalmente se encuentra, el 19 de septiembre de 1911 (una fecha tardía, sólo poco más de seis años antes de su muerte) a su «colega» Bertrand Russell:

«[...] Me gustaría mucho que nos acompañase usted a París. Allí podríamos ver juntos al Sr. Poincaré, con lo cual formaríamos un magnífico 'trío'. En cuanto a mí mismo, quizá sepa usted que soy un gran hereje en muchas cuestiones científicas, y también literarias, como, para no mencionar sino dos de ellas, éstas: soy baconiano en la cuestión Bacon-Shakespeare y soy un resuelto adversario del viejo Kant, quien, a mis ojos, ha hecho mucho daño y perjuicio a la filosofía e incluso a la humanidad, como usted ve fácilmente a través de ese desarrollo pervertido de la metafísica en Alemania en todo cuanto le siguió, como en Fichte, Schelling, Hegel, Herbart, Schopenhauer, Hartmann, Nietzsche, etc., etc., hasta nuestros días. Nunca pude entender eso, ni por qué personas tan razonables y ennoblecidas como los italianos, los ingleses y los franceses han podido seguir a ese *filisteo sofisticado*, que *tan mal matemático* fue. Y ahora resulta que el Sr. Poincaré se ha enamorado perdidamente de esa momia abominable que es Kant, si es que no ha sido hechizado por él»¹¹⁹.

¹¹⁸ Cf. CANTOR, *Briefe...*, 140. Cantor achaca aquí mismo también a Hegel la ausencia en él de este «concepto intermedio», dado que Hegel «distingue solamente entre el 'infinito malo', al que yo denomino 'infinito impropio', y el 'absolutamente infinito', que no permite ya ningún agrandamiento». Véase asimismo CANTOR, *Gesammelte...*, 391. Acerca del modo como entiende Hegel su «infinito» y, concretamente, su «infinito malo» remito a CABADA CASTRO, M., *El Dios que da que pensar. Acceso filosófico-antropológico a la divinidad* (Madrid, B.A.C., 1999), 368-373.

¹¹⁹ CANTOR, *Briefe...*, 457. La carta continúa todavía con estos párrafos sobre el matemático francés: «Así comprendo muy bien la oposición del Sr. Poincaré, por la cual me siento honrado, aunque nunca haya sido intención suya honrarme, de eso estoy seguro. Si espera que le conteste para defenderme está ciertamente en un craso error. Creo que es unos diez años más joven que yo, pero he aprendido a esperar en todas las cosas, y ahora preveo claramente que en esta disputa *no será yo quien sucumba*. Que haga lo que le plazca. Pero no me considero obligado a entrar yo mismo en la batalla; otros le precipitarán y me permitirán hacer cosas más grandes e importantes [...] Jamás hice daño al Sr. Poincaré; al contrario, *le he honrado mucho en mis 'Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre'*». La traducción castellana de esta carta a Russell, escrita en inglés por Cantor, puede leerse en RUSSELL, B., *Autobiografía. 1872-1914* (Madrid, Aguilar, 1968), 349-350. Como introducción o presentación de esta carta a Russell, dice éste que Cantor «fue, en mi opinión, uno de los más grandes intelectos del siglo XIX» (RUSSELL, *Autobiografía...*, 347). Por lo demás, el enojo de Cantor con Poincaré está relacionado concretamente con la conferencia de éste en el Congreso Internacional de Matemáticos de Roma en 1908, sobre lo cual le escribe Cantor el 26 de junio de este mismo año a D. Hilbert: «¿Qué dice usted acerca de la conferencia romana del Sr. Poincaré? ¿Qué orgullo ciego! ¿Qué banal, superficial, trivial toda su palabrería, aun prescindiendo de los *disparates sobre el 'can-*

Como suele ocurrirles a los innovadores, Cantor no pudo evitar tener que enfrentarse, a veces con cierta dureza, aunque sólo fuera epistolarmente, con opiniones diferentes o contrarias de matemáticos, filósofos, etc. en relación con la cuestión del «transfinito». Si Poincaré se convirtió en objeto especial de sus diatribas, no dejará tampoco de referirse más o menos críticamente a otros. A su gran predecesor, el matemático Carl Friedrich Gauss (†1855), aludirá por ejemplo en carta a R. Lipschitz de 19 de noviembre de 1883, y en el contexto del interés de Cantor por aquilatar lo más perfectamente posible su noción de «transfinito», en los párrafos siguientes, que por su interés en orden a una mayor comprensión del pensamiento de Cantor reproduzco ampliamente:

«En su escrito hace usted referencia a un texto de Gauss en carta suya a Schumacher del 12 de julio de 1831, en donde ‘protesta contra el uso de una magnitud infinita como algo *completo* [Vollendetet], lo que *jamás* está permitido en la matemática. Lo infinito es sólo una façon de parler [modo de hablar] [...]’. En estas frases se mezcla lo falso con lo verdadero; en lo que respecta a lo *verdadero*, lo encuentra usted en Leibniz, dicho por él casi con las mismas palabras [...] Su importancia consiste sencillamente en que en el cálculo *diferencial e integral* nunca se tiene que ver con magnitudes infinitamente pequeñas o infinitamente grandes, que podrían ser representadas como completas, es decir, inmutables, sino siempre y solamente con magnitudes arbitrariamente grandes o, como también se *dice*, con magnitudes que *se van haciendo* [werdenden] infinitamente pequeñas o infinitamente grandes. Gauss y Leibniz protestan, por tanto, aquí, y *con toda razón* contra la representación errónea, contradictoria, de diferenciales que *son* infinitamente pequeñas. Usted encontrará *la misma* protesta también en diversos lugares de mis artículos [...]. En los ‘Grundlagen’ formulo *la misma protesta*, en cuanto que me expreso contra la *confusión* del *infinito impropio* (así denomino yo lo *finito mudable*) con el *infinito propio* (así denomino lo infinito *determinado, completo*, o también lo *transfinito, suprafinito*). Lo *erróneo* en el texto de Gauss consiste en que dice que lo infinito completo no puede convertirse en objeto de la consideración matemática; este error está en relación con el otro error por el que (en concordancia por lo demás con Descartes, Leibniz y otros muchos predecesores [...]) identifica lo *infinito completo* con lo *absoluto, divino*»¹²⁰.

Con quien hubo de enfrentarse Cantor de manera más directa fue, sin embargo, con Leopold Kronecker (†1891), manifiesto defensor y representante de la

torismo! Seguramente no sabe él que Hermite, del que fui muy amigo, se separó totalmente en la última década de su vida de su inicial prejuicio, incitado y sustentado por Kronecker, contra el transfinito y la teoría de conjuntos» (Cf. PURKERT, *Georg Cantor...*, 229).

¹²⁰ CANTOR, *Briefe...*, 148-149. Ver también CANTOR, *Gesammelte...*, 374. De todos modos, teniendo en cuenta el contexto concreto de lo que Gauss escribe a Heinrich Ch. Schumacher, sugieren W. Purkert y H. J. Ilgauds que, a fin de cuentas, «posiblemente no tendría Gauss nada que objetar a la utilización por parte de Cantor de conjuntos actualmente infinitos» (Cf. PURKERT, *Georg Cantor...*, 47). En parecido sentido se expresa J. SFEZ, *L'hypothétique influence de Nicolas de Cues sur Georg Cantor dans la question de l'infinité mathématique*. En: *Das Mathematikverständnis des Nikolaus von Kues. Mathematische, naturwissenschaftliche und philosophisch-theologische Dimensionen* (hrsg. von F. Pukelsheim und H. Schwaetzer), Cusanus-Institut Trier, 2005, pp. 131-132 (n. 10).

matemática tradicional, al que Cantor acusa en carta del 5 de octubre de 1888 a P. Tannery, por su oposición a la «realidad de los números transfinitos», de «burdo finitismo»¹²¹. Por la carta de S. Kowalevski a G. Mittag-Leffler (de 21 de mayo de 1885) sabemos, por lo demás, de la aversión o poco aprecio que Kronecker tenía respecto de Cantor¹²², acerca de lo cual éste estaba naturalmente bien al tanto. En carta de 26 de diciembre de 1895 al matemático francés Hermite le comunica, en efecto, Cantor sobre su propia relación con Kronecker lo siguiente:

«Es verdad que estudié desde 1863 a 1867 principalmente en Berlín y por eso se me considera como discípulo de Kronecker y de Weierstrass. Pero la verdad es que esto último *no es correcto*, ya que en mis trabajos soy totalmente independiente de ambos. ¡Pero todavía más! Kronecker se ha expresado siempre muy despectivamente acerca de mis trabajos, que él no entendió, y otros le han imitado»¹²³.

De este modo aclara Cantor a Hermite una de las razones de su «postergación en Alemania», a la que él mismo añade en la mencionada carta todavía otra: la de percibirse de algún modo como extranjero y aislado en un país que en realidad no es el suyo¹²⁴.

¹²¹ Cf. CANTOR, *Briefe...*, 324.

¹²² A tenor de la mencionada carta, G. Eneström habría hablado a Kowalevski acerca del modo «muy mordaz» como Kronecker se había expresado respecto de Cantor (Cf. DAUBEN, *Georg Cantor...*, 312-313).

¹²³ Cf. PURKERT, *Georg Cantor...*, 196.

¹²⁴ «Por mi nacimiento *no soy alemán*, sino que sólo siendo adolescente (con 11 años) fui trasladado a Alemania. Nací en San Petersburgo. Mi difunto padre era danés de nacimiento (de Copenhague) y llegó siendo un niño a San Petersburgo. Mi buena madre, que ahora vive en Berlín, pertenece a una familia de músicos (Böhm) católica. En Alemania no tengo un solo pariente varón [...] Cuando tenía 17 años perdí a mi padre y desde entonces tuve que cuidar de mí mismo sin apoyo familiar alguno» (Cf. PURKERT, *Georg Cantor...*, 196). Como complemento de estas informaciones autobiográficas de Cantor, indicaré que C. Tapp, en su ya mencionada obra *Kardinalität...* edita por primera vez una carta de Cantor (que curiosamente firma dicha carta con el nombre de *George*, no *Georg*) dirigida el 23 de mayo de 1889 al jesuita A. Baumgartner en la que le comunica a éste lo siguiente: «Ayer vio usted que mi pseudónimo *lusitano confiado únicamente a la S. J. [Compañía de Jesús]* no es algo arbitrario, ya que hace referencia a mi origen portugués judío en el lejano pasado». Y añade seguidamente que su propio padre, nacido en Copenhague, «perteneía a la comunidad portuguesa judía ortodoxa» de esta ciudad (Cf. TAPP, *Kardinalität...*, 236-237. Ver todavía TAPP, *Kardinalität...*, 125-127, 156-157). Tras la edición de esta carta por Tapp, editó por su parte A.-M. Décaillot todavía recientemente otra nueva carta, escrita a Paul Tannery con fecha del 6 de enero de 1896 (casi siete años posterior, por tanto, a la primera), en la que Cantor nos proporciona informaciones más concretas sobre sus ascendientes: «Mi difunto padre *Georg Woldemar Cantor*, fallecido en Alemania en el año 1863, se trasladó de pequeño con su madre a *San Petersburgo* y enseguida recibió allí *el bautismo luterano*. Pero había nacido en *Copenhague* (no sé exactamente en qué año, más o menos entre los años 1810 y 1815) de *padres israelitas*, que pertenecían a la *comunidad judía portuguesa* de allí y que por ello muy probablemente eran de origen *hispano-portugués*» (Cf. DÉCAILLOT, A.-M., *Cantor et la France. Correspondance du mathématicien allemand avec les français à la fin du XIX^e siècle*, París, Kimé, 2008, p. 241). Como se ve, tras la edición de esta correspondencia de Cantor queda, por una parte, al menos provisionalmente zanjada en sen-

Pero Cantor, pese a todo, cree firmemente en la verdad y en el porvenir de sus ideas sobre el «transfinito». En tal sentido escribe el 23 de diciembre de 1883 a G. Mittag-Leffler:

«Mis buenos amigos, que gustosamente se autodenominan metamatemáticos, pueden tranquilamente pensar sobre mis cosas lo que quieran, pueden escribir sobre ellas, más allá de Londres y París y, si les place, más allá también de Kamtschatka, lo que consideren conveniente; lo que yo, sin embargo, sé es que las ideas en las que según mis débiles fuerzas trabajo ocuparán las mentes pensantes a través de generaciones, incluso cuando mis buenos amigos, los señores metamatemáticos, y yo hayamos hecho mucho recorrido el camino de todo mortal. Estoy muy lejos de adjudicarme a mí mismo mis descubrimientos como personal mérito mío, puesto que no soy sino un instrumento de un poder superior, que seguirá actuando después de mí, del mismo modo que se manifestó hace milenios en Euclides y Arquímedes»¹²⁵.

Y todavía veinticinco años más tarde, en la carta que le escribe a Hilbert el 24 de junio de 1908, después de haber dado rienda suelta a su animosidad contra Poincaré por la aludida conferencia de Roma, continúa del modo siguiente:

«Los elogios que él [Poincaré] [...] me hizo no quiero publicarlos, porque esto podría ser interpretado como arrogancia o autoelogio por parte mía. La verdad es que mi temática habla por sí misma, y lo que desde hace una generación o más he puesto en movimiento, desde la distancia y el retiro, de manera consciente e intencionada, sin muchas palabras ni boato, actuará y hace tiempo que actúa ya por su propio peso. A los académicos de más acá o más allá del Rin (me refiero a Berlín y a París) no les ayudará nada su perezosa y débil resistencia como tampoco las recientes flechas envenenadas de sus pioneros Poincaré, Picard, Borel, König, etc... Serán arrastrados y aplastados por el peso gigantesco de la teoría de conjuntos, para quedar allí estrangulados»¹²⁶.

Finalmente, en cuanto al destinatario de la precedente carta, su «colega y amigo» el matemático David Hilbert (†1943), diecisiete años más joven que Cantor, he de indicar únicamente que su aprecio de la teoría cantoriana de los números transfinitos se muestra, por una parte, en párrafos como éste: «me parece la más maravillosa floración del espíritu matemático y, sin duda, una de las más altas aportaciones de la serena y pura actividad de la inteligencia humana»¹²⁷.

tido positivo la cuestión sobre el origen judío (por línea paterna) de Cantor y, por otra, se tiene asimismo por primera vez noticia de que Cantor consideraba «muy probable» su procedencia (también por línea paterna) de antepasados hispano-portugueses.

¹²⁵ CANTOR, *Briefe...*, 160. En este mismo sentido, y sólo algunos años después de esta su comunicación a Mittag-Leffler, indicaba Cantor el 20 de mayo de 1888 al franciscano Ignatius Jeiler respecto de su propia teoría del «transfinito»: «estoy firmemente convencido de que llegará el día en que esta teoría se convertirá en patrimonio común de la ciencia *objetiva* [*objektiv-gerichtet*] y que será confirmada de manera especial por *aquella teología* que tiene su base en la *Sagrada Escritura*, la *Tradición* y la *constitución natural* del género humano, las cuales están, *las tres*, en mutua y necesaria armonía» (Cf. TAPP, *Kardinalität...*, 413).

¹²⁶ Cf. PURKERT, *Georg Cantor...*, 229.

¹²⁷ HILBERT, D., *Fundamentos de la Geometría* (Madrid, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1991), 271.

De tal manera que, en su discusión sobre los fundamentos y la función de la matemática, formulará su conocida sentencia: «Nadie podrá echarnos del paraíso que Cantor nos creó»¹²⁸. Hilbert mostró también en tal sentido su desacuerdo con la displicente postura de Poincaré en relación con la teoría de conjuntos de Cantor, a cuyo enojo respecto del matemático francés he aludido ya¹²⁹.

Sin embargo, esta estima teórica por los descubrimientos de Cantor no se corresponderá, por otra parte, de manera adecuada con los propios postulados o tesis de Hilbert respecto de la matemática en general, que parecen estar, por el contrario, en clara oposición con los principios en los que enmarca Cantor su discurso sobre el «transfinito». A fin de cuentas, Hilbert llegará a decir, por ejemplo, que «el infinito no se encuentra por parte alguna en la realidad, cualquiera que sean las experiencias, observaciones o ciencia puestas a contribución»¹³⁰. Una afirmación que se corrobora algunos párrafos después, convirtiéndose al mismo tiempo en conclusión o resultado final de las reflexiones vertidas en su artículo de 1926, con el título de *Sobre el infinito*:

«El infinito no se encuentra realizado en parte alguna; ni existe en la naturaleza ni es admisible como fundamento en nuestro pensamiento intelectual [...] El operar con el infinito puede ser únicamente garantizado por medio de lo finito. El papel que le queda al infinito es simplemente el de una idea, si se comprende como idea, conforme a las palabras de Kant, un concepto de razón que sobrepasa toda experiencia y por medio del cual se completa lo concreto en el sentido de la totalidad»¹³¹.

Nada puede, en realidad, ser más opuesto al pensamiento de Cantor que estas conclusiones de Hilbert respecto del infinito, estando además inspiradas o dirigidas por un filósofo como Kant, a quien Hilbert considera «profundo pensador»¹³², pero que para Cantor, según se indicó, en modo alguno merecía tal calificativo. De hecho, Hilbert viene a abdicar aquí totalmente de la concepción básica cantoriana del «infinito en acto», convirtiéndolo de hecho en mero infinito «potencial». Ello implica también naturalmente la ausencia de cualquier «realización» del infinito (del «infinito en acto») en la naturaleza o en el mundo creado, una tesis que es casi literal y directamente opuesta a la mantenida por Cantor.

Hilbert pretendió, sí, con su «teoría de la demostración», «establecer —tal como dice— la seguridad definitiva en los métodos matemáticos»¹³³, intentan-

¹²⁸ HILBERT, *Fundamentos...*, 275. Corrijo aquí por mi parte, a tenor del original alemán, la manifiestamente errónea traducción de esta frase de Hilbert.

¹²⁹ «Poincaré, matemático muy rico y muy fecundo en ideas entre los de su generación, tenía, cosa deplorable, una expresa prevención contra la teoría de Cantor, lo cual le impedía juzgar rectamente las novísimas y grandiosas concepciones cantorianas» (HILBERT, *Fundamentos...*, 299).

¹³⁰ HILBERT, *Fundamentos...*, 275.

¹³¹ HILBERT, *Fundamentos...*, 287. Introduzco algunas modificaciones en la traducción a la vista del original alemán.

¹³² Cf. HILBERT, *Fundamentos...*, 275.

¹³³ Cf. HILBERT, *Fundamentos...*, 265.

do convertir así la matemática en «un tribunal arbitral» o «de última instancia» para la definitiva resolución de todas las cuestiones particulares¹³⁴. Pero es, por lo demás, bien sabido que Gödel (a quien sin duda se le puede considerar de alguna manera afín a los presupuestos filosóficos del propio Cantor) truncó de raíz el proyecto hilbertiano. A la vista de ello, seguramente no es erróneo afirmar, por tanto, que, a pesar de los elogios que le dirige a Cantor, «Hilbert, ontológicamente hablando, no es menos finitista que Brouwer»¹³⁵.

Como se ve, es indudable que el pensamiento infinitista de Cantor, apoyado sobre fundamentos matemáticos y filosóficos a un tiempo, supuso en realidad un considerable y competente desafío teórico tanto a la filosofía como a las matemáticas tradicionales, impulsándolas a superar su atávico «horror al infinito».

c/ Universidad Comillas, 7
28049 Madrid
m.cabada@res.upcomillas.es

MANUEL CABADA CASTRO

[Artículo aprobado para publicación en abril de 2009]

¹³⁴ Cf. HILBERT, *Fundamentos...*, 287. Hilbert sostenía que la «inteligencia matemática [...] es capaz de escudriñar hasta las leyes del propio pensar», de modo que se puede decir, a su juicio, que «en la matemática no existe el 'ignorabimus' ['ignorarémos']». Cf. HILBERT, *Fundamentos...*, 319.

¹³⁵ Cf. BENARDETE, JOSÉ A., *Infinity. An Essay in Metaphysics* (Oxford, Clarendon Press, 1964), 56. L. E. J. Brouwer representa la matemática «intuicionista» (explícitamente anticantorian) frente a la matemática «axiomática» de Hilbert. Pero, a la postre, ambos modos diferentes de abordar la ardua cuestión de los fundamentos de la matemática caminarían así, de una o de otra forma, por la poco recomendable ruta kantiana.

