

Determinismo, azar, caos

¿Son las ciencias exactas realmente tales? ¿Responden las matemáticas, la física y la química a unas leyes ineluctables entrañadas en la materia? El autor de este artículo recuerda notables hitos científicos, para desentrañar el paradójico binomio del azar y la necesidad que anidan en el corazón de las cosas, permanentes y cambiantes. Por último, se aborda el fenómeno del caos, que ha venido a sumarse como un tercero en discordia, hasta hacer más impredecible aún el comportamiento de la materia.

Antonio F. Rañada*

SEGURO que los hombres primitivos sintieron ya esa inquietud que nos asalta cada día desde la extraña dualidad entre el ser y el devenir. El mundo se nos presenta como hecho de cosas que permanecen y que cambian, a la vez, que son sólidas y también fugaces, de fenómenos previsibles e inesperados, de astros impasibles y del drama de la vida que nace y muere.

* Departamento de Física teórica. Universidad Complutense.

Los griegos dieron forma filosófica a esa antinomia mediante las doctrinas antagónicas de Parménides de Elea y Heráclito de Éfeso. El primero veía, ante todo, lo permanente y lo inmutable de las cosas, o sea, el ser. El segundo, lo cambiante y lo fugaz, es decir, el devenir. Esta oposición fue tan fecunda para la ciencia que la propia idea del átomo surgió de un intento de compromiso entre esos puntos de vista contrarios. Pues Leucipo y Demócrito pensaron que, si las cosas están hechas de pequeños corpúsculos indivisibles, su inmutabilidad debida a su extrema dureza explicaría lo permanente, mientras que las colisiones entre ellas darían cuenta de la fugacidad, al introducir cambios en su disposición mutua, a la manera de una partida de billar con innumerables bolas.

Demócrito lo resumió en una frase redonda: «Todo lo que ocurre en este mundo se debe al azar y la necesidad». En el polo de la necesidad todo está determinado a partir de leyes inexorables, de manera que no puede haber allí nada nuevo: todo lo que ocurre hoy estaba ya contenido en el estado que tenía ayer el mundo, es su consecuencia inevitable. Por contra, en el polo del azar reina lo impredecible, lo fortuito, la aparición de formas nuevas, que no estaban contenidas en las de ayer. Está claro que el mundo que vemos se mueve entre esos dos polos; saber cuánto hay en él de azar y cuánto de necesidad ha sido una de las preocupaciones más importantes de la ciencia en toda su historia.

Una vez superado el pensamiento mágico, todas las concepciones del mundo se basan en combinaciones de tres elementos: azar, necesidad y acción divina. Como la ciencia no considera a esta última, sus ideas sobre las leyes básicas de la naturaleza se construyen con diversas proporciones de las dos primeras.

Newton y el determinismo

AUNQUE la revolución científica del siglo XVII extrajo sus ideas de varias tradiciones, una base muy importante de su éxito fue la llamada filosofía mecánica, o sea, la creencia de que la naturaleza puede explicarse suponiendo que los cuerpos están formados por corpúsculos sometidos a fuerzas. La idea cristalizó en la ingente obra de Newton y en el llamado luego programa newtoniano.

Sus teorías del movimiento y de la Gravitación Universal triunfaron de modo espectacular al deducirse de ellas las tres de Kepler del movimiento

planetario y porque aportaron una novedad radical e importante: son universales, es decir, se aplican en todo el universo, tomando así su validez una importancia objetiva tremenda, pues indica que la capacidad humana de comprender el Cosmos es mucho mayor de lo que se imaginaba. Cuando la teoría fue desarrollada matemáticamente en el siglo XVIII por L. Euler y J. L. Lagrange en el marco de las llamadas ecuaciones diferenciales, se comprende a fondo una propiedad muy importante del paradigma newtoniano: es determinista, lo que significa que las soluciones de la teoría, es decir, la expresión de los movimientos, quedan completamente determinadas para todo tiempo pasado y futuro, una vez conocidas las posiciones y velocidades actuales. La consecuencia es importante: conociendo el presente, se puede predecir el futuro y retrodecir el pasado. Con ese determinismo, el polo necesidad triunfa completamente sobre el polo azar.

El llamado «eclipse de Herodoto» nos ofrece un ejemplo expresivo de lo que esto significa. Cuenta ese historiador que, cuando los lidios y los medos se enfrentaban en una batalla, «el día se tornó súbitamente en noche», lo que asustó de tal modo a los contendientes que acordaron la paz de inmediato. Herodoto no da la fecha de la batalla, sí el lugar, y ningún otro historiador nos informa de ella. Sin embargo sabemos hoy que la lucha tuvo lugar el día 28 de mayo del año 582 a. C. y, además, que fue por la tarde. Basta, para llegar a esta conclusión, con resolver las ecuaciones newtonianas del sistema Sol-Tierra-Luna, comprobando así que la luna cortó la luz del Sol sobre la zona de la batalla en ese momento. O sea que toda la historia del Sistema Solar está contenida de alguna forma en su estado de hoy.

Mas el mismo Newton fue el primero en descubrir que el determinismo tiene limitaciones. Ocorre que la fuerza más importante sobre cada planeta es la debida al Sol y, al despreciar las de los planetas entre sí, se concluye que se debe mover sobre una elipse como había mostrado Kepler. Pero las fuerzas entre los planetas, aunque débiles en comparación con la del Sol, no son completamente despreciables, por lo que deben incluirse en el análisis. Newton comprendió que ello podría cambiar mucho las cosas, sacando poco a poco a cada uno de su elipse, de manera que el movimiento global se haría extremadamente complejo, incluso imposible de determinar, no pudiendo excluirse la expulsión de un planeta fuera del sistema (así ha sucedido realmente con muchos asteroides). Lo expresó diciendo que «calcular en detalle el movimiento futuro del Sol y los planetas, excede, a menos que yo esté muy equivocado, a la capacidad de todo el intelecto humano». Con estas palabras el propio Newton estaba descubriendo el movimiento caótico. Pero que el Sistema Solar pudiera deshacerse le parecía una idea muy desagradable y

contraria a la armonía que creía percibir en todo el universo. Para evitarlo, supuso que Dios intervendría para restaurar el orden en caso de desajuste, colocando de nuevo cada planeta en su elipse kepleriana.

Laplace y el mecanicismo

ESTA importante observación de Newton cayó en el olvido, debido a dos tipos de reacciones. Por un lado, Leibniz le acusó de tener una pobre idea de Dios, como si fuese un operario torpe fabricante de mecanismos que necesitan de constantes ajustes y arreglos. Por otro, y esto tuvo un efecto más fuerte desde dentro de la ciencia, Laplace creyó demostrar que el desajuste del Sistema Solar que Newton temía no se podría producir, porque las propias fuerzas entre los planetas acabarían impidiéndolo. Laplace acababa de construir una de las estructuras más impresionantes de la historia del pensamiento, su famoso sistema del mundo, transformando la astronomía en una mecánica celeste de enorme precisión. Cabía esperar que el efecto temido por Newton se manifestase primero en el movimiento de Júpiter y Saturno, los planetas más masivos; por eso Laplace dedicó un gran esfuerzo al estudio de la interacción de esos dos cuerpos con el Sol. Creyó probar que, si bien parecía en un principio que esos dos astros se separaban poco a poco de sus órbitas, sus mismas fuerzas mutuas las harían volver más tarde a ellas, restaurando así la estabilidad del Sistema Solar. Eso explica el sentido de una anécdota famosa: cuando Napoleón le preguntó por el lugar de Dios en su sistema del mundo, lo que quería saber es por qué los planetas se mantienen en sus órbitas. La contestación de Laplace, «Sire, no necesito esa hipótesis», se refiere a que, según sus cálculos, el sistema es estable por el mero efecto de las leyes de Newton. Sin embargo hoy sabemos que Laplace se había equivocado.

La obra de Laplace causó un enorme impacto, pues representaba una visión unificada y exactísima del mundo, basada sólo en cuatro leyes de Newton: las tres del movimiento y la de la gravedad. Su acuerdo con las observaciones era espectacular. Se impuso la metáfora del universo-reloj, abriéndose paso luego la idea de que el relojero era innecesario: bastaba con las leyes naturales. Todos se olvidaron del temor de Newton y usaron otra frase suya para fundar sobre ella lo que se llamó el programa newtoniano, base científica del mecanicismo del XIX. Esa frase está en la 1.^a edición de sus *Principia*: «Ojalá que fuera posible deducir todos los fenómenos natura-

les... a partir de principios mecánicos; porque muchas razones me inclinan a sospechar que todo depende de ciertas fuerzas que hacen que las partículas de los cuerpos... se empujen llegando a formar figuras, o se repelan y se separen unas de otras». Nótese la semejanza con la afirmación de Demócrito y la mayor cautela de Newton.

La expresión más radical del mecanicismo basado en la interpretación extremada de la frase de Newton es la conocida inteligencia o demonio propuesto por Laplace, capaz de conocer la posición y velocidad de todas las partículas del mundo; según él, su enorme habilidad matemática, le permitiría conocer por completo todos los movimientos, de modo que «nada le resultaría incierto y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos».

Por eso, a lo largo del siglo XIX, se asiste a la apoteosis del determinismo, es decir, del polo necesidad de Demócrito. O, en otras palabras, al triunfo del ser sobre el devenir y a la victoria de Parménides. Las nuevas observaciones astronómicas parecían confirmarlo fuera de toda duda. Al descubrirse el asteroide Ceres, entre Marte y Júpiter, se comprueba que su órbita se acompasa fielmente a lo previsto por el determinismo newtoniano. En 1849, el francés Leverrier demuestra que Urano se desvía algo de lo previsto por la teoría. Es tal su confianza en la ley de la gravitación que postula que un planeta no detectado está tirando de él. Calcula la posición que debía tener, sin haberlo visto nunca, y pide a los astrónomos que miren allí. Pocos días más tarde, Neptuno es observado precisamente en ese sitio.

De modo inevitable se estableció la idea de que el azar no existe, sólo es una apariencia. Sucede que, cuando el número de variables de un sistema es demasiado grande, aunque siga siendo determinista, no es posible por razones prácticas calcular los detalles finos de su movimiento. Conviene recurrir entonces a hacer promedios, como cuando una encuesta nos informa sobre las opiniones de la gente. Si aparecen probabilidades, ello se debería sólo a razones prácticas, no de principio. Por eso, en el siglo XIX se llegó a concebir al azar como una ficción metodológica, encubridora de nuestra ignorancia de los detalles, pero ignorancia vencible, al menos como cuestión de principio.

Los éxitos de la astronomía impulsaron a muchos científicos a caer en la trampa de la extrapolación. Sobre ella se fundó el llamado mecanicismo, que fue considerado por muchos como base inevitable de cualquier concepción válida del mundo. A lo largo del siglo XIX se llegó a decir «ser libre es hacer mentir a las leyes de la física y la química», pues, se argumentaba, cuando

una persona hace algo, sólo puede moverse en la forma determinada por el estado de sus átomos, que estaba ya prefijado en la nebulosa de la que se formó el Sistema Solar. Bertrand Russell, por ejemplo, contaba, ya de edad avanzada, que en su adolescencia se sintió profundamente impresionado por esta idea, una de las razones de su abandono del cristianismo.

Conviene subrayar que el mecanicismo no es una consecuencia lógica de las leyes de Newton, sino que implica un cambio cualitativo, no justificado por el conocimiento científico. Es, más bien, propio de una posición filosófica frente al mundo natural, caracterizada por una hipótesis implícita pero esencial: la gran diversidad de fenómenos naturales se puede reducir completamente al resultado de un conjunto reducido de leyes cuantitativas simples que regulan la evolución de un número limitado de variables. Ese conjunto de leyes serían las de Newton y algunas más no muy distintas. Además, el mecanicismo, al menos en su forma radical, está en clara contradicción con el espíritu científico que siempre dice que cualquier ley es aplicable solamente dentro de ciertos límites y de ciertas aproximaciones. Hay que estar siempre preparado para que puedan aparecer nuevos elementos, variables, interacciones, propiedades emergentes y niveles de complejidad a los que se apliquen leyes distintas a las conocidas.

Una de las consecuencias más sorprendentes del mecanicismo es que implica una refutación del tiempo. La intensa sensación que tenemos de su paso se debe a una sucesión no prefijada de estados mentales, pues se nos ocurren ideas o se nos presentan imágenes que no estaban antes en nuestra cabeza, creadas u originadas de algún modo no automático. Además, el mundo se nos presenta no sólo como actualidad, sino como cambio, como devenir tanto como ser. Realmente el tiempo implica la novedad y poca puede haber en el mundo si todo lo que sucede hoy estaba ya en su estado de ayer. Por eso, desde el punto de vista del determinismo radical, el tiempo es sólo apariencia. Einstein así lo expresó en una carta enviada a la esposa de Michele Besso, un amigo de su juventud, cuando éste murió poco antes que él mismo: «Michele se me ha adelantado en dejar este extraño mundo. Poco importa. Para nosotros, físicos convencidos, el tiempo es tan sólo una ilusión, por persistente que parezca».

Pero todo ese edificio conceptual se basaba en olvidar un detalle, un término pequeño que Laplace había despreciado en sus ecuaciones del Sistema Sol-Júpiter-Saturno. Era minúsculo, realmente, pero resultó que creía en el tiempo en contra de lo que él había supuesto. Así apareció el efecto mariposa.

El redescubrimiento del azar y del tiempo. Las tres rupturas del mecanicismo

DESDE que Laplace presentara a su demonio, el papel de las probabilidades en la descripción del mundo material no ha cesado de aumentar. Por ello el mecanicismo se rompió por tres frentes:

1. En la segunda parte del siglo XIX, por el de los sistemas complejos con muchas variables, tantas que no es posible seguir la traza de cada una de ellas y hay que recurrir a las probabilidades y a los promedios.

2. En los años veinte de este siglo, por el de los sistemas cuánticos como átomos, moléculas, núcleos o partículas elementales, cuyas leyes son de naturaleza muy distinta a las de Newton.

3. Por el de los sistemas caóticos, cuyo comportamiento es muy complejo, a pesar de que su aspecto puede ser muy simple y tener pocos grados de libertad. Resulta sorprendente que estos sistemas sean, a la vez, deterministas e impredecibles. Sólo se tomó conciencia general de esta ruptura en los últimos veinte años, aunque su idea fundamental fue ya comprendida a finales del siglo XIX por el matemático francés Henri Poincaré.

La necesidad de estudiar sistemas complejos propició el nacimiento de una tradición nueva basada en leyes probabilísticas. Consideremos la pregunta ¿cuál será el estado de un sistema al cabo de cierto tiempo? Una ley de tipo newtoniano da una respuesta clara y definida, asignando de modo preciso un único estado. La respuesta de una ley probabilística es mucho más débil ya que considera una colección de estados posibles y simplemente asigna una probabilidad a cada uno.

Si el sistema consta de muchos elementos es necesario por razones prácticas recurrir a las probabilidades, incluso admitiendo que la ley de la acción entre los constituyentes sea determinista, porque el número de datos a manejar es demasiado grande. Desde esta perspectiva, el azar implicado por una ley probabilística no es objetivo; se trata más bien de un truco epistemológico para poder decir algo sobre el comportamiento del sistema. Por eso la segunda ruptura, la de la teoría cuántica, es más radical, pues consagra el determinismo esencial e inexcusable de los constituyentes del mundo, o sea las moléculas, los átomos, los núcleos o las partículas elementales. En ese ámbito se pueden predecir probabilidades, no certezas; las magnitudes físicas ni siquiera tienen valores bien determinados y las leyes asignan probabi-

lidades a los resultados de las medidas. O sea que el azar es objetivo: no un truco epistemológico, sino la expresión de un derecho de la naturaleza.

Y así, tras el triunfo del polo necesidad con el mecanicismo, en la primera parte del siglo XIX, la ciencia empezó a redescubrir el azar, a Heráclito y, por lo tanto, el tiempo. La tercera ruptura hizo todavía más claro que eso era necesario.

El movimiento caótico

Y así es como la mecánica estadística de los sistemas complejos y la teoría cuántica del mundo atómico y subatómico han ido desalojando al determinismo de su lugar de señor absoluto de la concepción física del mundo. Sin duda las probabilidades –o sea el azar– resultan inevitables; pero aún quedaba mucho sitio para el determinismo. Primero, porque en la mayoría de los sistemas macroscópicos los efectos cuánticos se cancelan del todo, o bien son tan pequeños que se pueden despreciar. Por poner sólo dos ejemplos, no juegan ningún papel en la dinámica de los planetas o en el diseño del motor de un automóvil. Además, a lo largo del siglo XX se empezó a aplicar el paradigma de la ecuaciones diferenciales a parcelas muy variadas de la experiencia, intentando entenderlas según el modelo de la mecánica newtoniana. Como en estos casos no cabe hablar de efectos de física cuántica, se abre la puerta de otros determinismos de tipo social, económico o psicológico.

Por eso tiene tanta importancia el sorprendente descubrimiento de que el determinismo no implica predecibilidad y que el análisis que se hacía en el siglo XIX es insuficiente, pues pasaba por alto uno de los aspectos más importantes del problema: el comportamiento de las inevitables imprecisiones (conocidas técnicamente como errores). De manera breve y precisa: para poder realizar la predicción completa del futuro (o del pasado) de un sistema no basta con que su ecuación sea determinista como las de la mecánica newtoniana; además, es necesario tener la capacidad de manejar cantidades infinitas de información, cosa imposible para seres finitos como los humanos.

Pues ocurre que la mayoría de los sistemas newtonianos deterministas tienen movimientos que hoy se llaman caóticos. Son aquéllos tan complejos y sus trayectorias se entrecruzan de forma tan errática y turbulenta que resulta imposible la predicción detallada para tiempos grandes. Ello se debe a la extrema sensibilidad de los movimientos a pequeños cambios en los datos iniciales, propiedad conocida técnicamente como *Sensibilidad Fuerte a*

las Condiciones Iniciales (SFCl). Nótese que todas las cantidades que definen las condiciones iniciales –longitudes, velocidades, ángulos– se conocen con un margen de error inevitable (por eso se escribe el valor de una variable como « x más menos dx »), debido bien a las imprecisiones de las medidas bien a inexactitudes de los métodos de cálculo. Así, en el caso del lanzamiento de una nave espacial, se sabe que sale con velocidad comprendida entre dos cotas muy próximas « $v+dv$ » y « $v-dv$ ». Pues bien, sucede que ese margen de imprecisión dv , aunque sea muy pequeño al principio, aumenta en muchos casos cada vez más de forma violenta y errática. Y esto ocurre para cualquier esquema matemático que se use.

En 1967, el matemático norteamericano Edward Lorenz se encontró de repente con este problema. Al intentar comprender el movimiento de la atmósfera cuando el aire se calienta por debajo, llegó a tres ecuaciones de aspecto sencillo que regían la variación de la temperatura y la velocidad del aire. Al intentar resolverlas con un ordenador se encontró con un problema serio: cualquier pequeñísima variación en el dato inicial producía cambios enormes al cabo del tiempo. Como los datos meteorológicos se conocen con imprecisiones inevitables, pues no hay observaciones en todos los puntos del mapa, la consecuencia es clara: el tiempo es imprevisible. Ya lo sabíamos, pero se pensaba que ello era debido a la inexperiencia de los meteorólogos o al escaso desarrollo de su ciencia. No es así. El problema es que la atmósfera es un sistema caótico. Para explicar este hecho, Lorenz acuñó la expresión *efecto mariposa*, aludiendo a un meteorólogo que, tras hacer un cálculo cuidadoso y exacto de la evolución de la atmósfera, vería arruinados sus esfuerzos por no haber tenido en cuenta el batir de las alas de una mariposa. Esta pequeña imprecisión podría aumentar luego de forma explosiva. La frase hizo fortuna y se usa hoy para designar al aumento incontrolado de los errores. El efecto mariposa es más fuerte unos días que otros y de ello depende la exactitud de la predicción.

Este aumento de los errores se caracteriza por el llamado «*tiempo de Liapunov*», propio de cada sistema, que es el que tiene que transcurrir para que se dupliquen sus valores (en promedio). Al cabo de dos tiempos de Liapunov, la imprecisión se multiplica por cuatro; el cabo de tres, por ocho; al cabo de n , por 2 elevado a n . O sea, que crece en progresión geométrica. Como consecuencia en cada nivel de precisión hay un *tiempo de predicción fiable*, más allá del cual el error es superior al exigido. Es posible mejorar ese tiempo usando un esquema matemático más complejo, pero, y eso es importante, siempre crece más deprisa el esfuerzo matemático –medido por el número de operaciones elementales– que el tiempo de predicción fiable. Por

eso resulta imposible la exigencia de mantener la precisión para todo tiempo, lo que llevó al físico ruso-belga Ilya Prigogine a decir: «Vemos el mundo a través de una ventana temporal» (entre ahora y el tiempo de predicción fiable).

El cambio de perspectiva es tal que el presidente de la Unión Internacional de Mecánica Pura y Aplicada, el británico James Lighthill, dijo en 1986, al inaugurar un congreso de su asociación: «Debemos hablar en nombre de la gran fraternidad de practicantes de la mecánica. Somos hoy muy conscientes de que el entusiasmo que animaba a nuestros predecesores les llevó a generalizaciones sobre la predecibilidad que hoy sabemos que son falsas. Debemos presentar excusas colectivamente por haber inducido a error, propagando respecto al determinismo ideas que, a partir de 1960, se han declarado incorrectas».

¿Cómo es posible que se hubiera pasado por alto durante tanto tiempo esa propiedad tan importante de la dinámica clásica? Hay una razón: nuestra intuición del comportamiento del mundo físico estaba basada en el estudio del Sistema Solar que es muy especial: su tiempo de Liapunov es muy grave, de decenas de millones de años, prácticamente infinito a la escala de nuestras vidas. Además, los sistemas cuya solución se puede expresar de forma simple –los primeros en ser estudiados– pertenecen a la clase excepcional de los llamados *integrables* para los que la predicción es realmente posible, pero que nunca se dan exactamente en la naturaleza, son sólo idealizaciones. Los profesores hemos mantenido el equívoco, ante la necesidad de poner problemas fáciles a los estudiantes. Se llegó así a una situación aberrante: nuestras ideas básicas sobre la materia estaban basadas en el Sistema Solar, que es escasamente representativo de los demás.

Hay otra manera de caracterizar el caos mediante la teoría de la información. El estado de un sistema se expresa mediante varios números cuyo conocimiento implica una cierta cantidad de información, es decir, un cierto número de bits. Pues bien, aumento de los errores significa pérdida de información. Como la cantidad de información inicial es finita, se acabará agotando del todo, momento en que no sabremos nada sobre lo que le ocurre al sistema. Volveremos sobre ello.

¿Qué es una pauta regular?

HEMOS hablado de movimiento regular como de aquel que puede predecirse. Las palabras «regular» y «regularidad»

tienen una larga tradición científica. Se han usado a menudo en expresiones como «regularidad de la naturaleza», considerándose que uno de los pasos más importantes del método científico consiste en detectar y observar regularidades, tratando luego de ordenarlas en una teoría.

En algunos casos es posible reconocer una recurrencia clara; así ocurre cuando el movimiento es periódico, como la sucesión del día y la noche o muchos movimientos astronómicos. Sin embargo si no se observa tal regularidad, no se puede asegurar que, tras esperar un tiempo mayor no aparezca alguna pauta que no era aún evidente.

Para aclarar esta cuestión, conviene considerar lo que se llama «evolución en grano grueso». Para ello se divide el espacio que representa los estados posibles del sistema en un cierto número m de celdas y se realizan observaciones a intervalos regulares (cada segundo, cada día o cada año), anotando el número de la celda en que se encuentra el sistema. Se obtiene así una sucesión de números menores o iguales a m . De esta forma habremos construido algo parecido a una ruleta con m números. En algunos casos, esa sucesión mostrará una regularidad clara, de forma que tras observarla detenidamente durante un tiempo podremos predecir cuál será el número siguiente con toda precisión y seguridad. Así ocurre con los movimientos regulares. Pero hay otras ocasiones en que, por mucho que se observe la sucesión, es imposible predecir el número siguiente con seguridad: son las órbitas caóticas.

Por ejemplo, dividamos el cielo en 12 sectores iguales de 30 grados; cada uno coincidirá con uno de los signos del Zodíaco. Si anotamos la posición del Sol cada mes (como se hace en astrología para realizar el horóscopo), obtendremos una sucesión de números entre 1 y 12 de gran regularidad, un conjunto de doce números que se repiten sucesivamente: o sea un movimiento periódico. Se dice que hay una sola frecuencia, un ciclo por año en este caso. No cabe duda de que, conociendo la posición del Sol hasta el mes actual (o sea la sucesión de números), podremos predecir con éxito cuál será la del próximo.

En ocasiones, la regularidad es algo más complicada pero aún fácilmente reconocible. Así ocurre cuando coexisten varias frecuencias, pudiendo considerarse el movimiento como la superposición de varios movimientos periódicos. Si observamos un planeta desde la Tierra, nuestros datos reflejan mezcladas las dos frecuencias, las del planeta y de la Tierra alrededor del Sol. Esto causa el movimiento retrógrado que tienen a veces Marte y los otros planetas exteriores. Si estudiamos un satélite de Júpiter, habrá tres frecuencias: la del satélite alrededor de Júpiter y las de éste y la Tierra alrededor del

Sol. Los movimientos con n frecuencias se llaman cuasiperiódicos; sus pautas de evolución son más complicadas que las de los periódicos, pero la diferencia no es muy importante pues son también predecibles. Es cierto que, si el número de frecuencias es alto, puede haber dificultades de tipo práctico pero la predicción es posible en principio. Esto significa que existe un algoritmo finito (o sea, un número finito de operaciones matemáticas elementales) que permite predecir el futuro dentro de cualquier margen dado de aproximación.

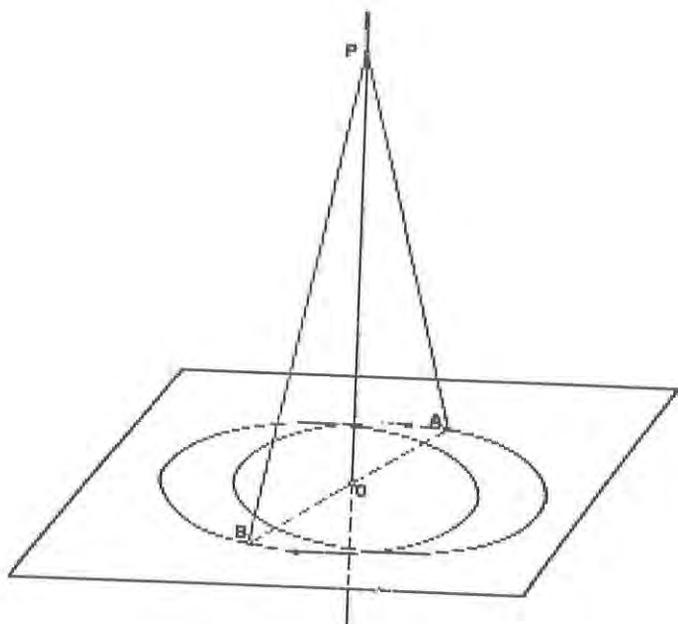
Pero hay sistemas cuyos movimientos tienen la peculiaridad de que, aunque es posible considerarlos como superposición de movimientos periódicos, es necesario usar un número infinito y continuo de frecuencias. En esos casos, por mucho que se estudie su comportamiento y por mucho tiempo que se espere, nunca podremos encontrar recurrencias adecuadas para la predicción, que resulta así imposible. Cuando eso ocurre hay efecto mariposa, o sea, sensibilidad fuerte a las condiciones iniciales: son los movimientos caóticos. Tomemos algunos ejemplos.

El problema de los tres cuerpos

COMO descubrió Newton usando otro lenguaje, el problema de los n cuerpos (o sea el movimiento de n astros que se atraen) es caótico desde $n = 3$. A lo largo del siglo XIX se sucedieron los esfuerzos por parte de grandes matemáticos y astrónomos para encontrar una solución completa a su movimiento, que incluyese todas las posibilidades para todo tiempo. Pero tal esperanza resultó vana. En la década de los noventa, Poincaré comprendió que esa solución era imposible; más aún, que esa imposibilidad se extiende a la mayoría de los problemas de la dinámica.

La configuración más simple del problema de los tres cuerpos, conocida como de Sitnikov, es la siguiente, indicada en la figura. Un planeta ligero P se mueve bajo la atracción gravitatoria de dos estrellas iguales A y B que giran una alrededor de la otra en un plano, describiendo dos elipses. P se mueve en la recta perpendicular al plano, cruzándolo sucesivamente de un lado al otro. Sean $(t_1, t_2, \dots, t_k, \dots)$ los intervalos de tiempo entre cruces sucesivos del planeta.

En el caso de un planeta de nuestro sistema solar, los t_k no siguen ninguna pauta regular, o sea, son caóticos, a pesar de que el sistema sigue una ley determinista: las ecuaciones de Newton para la Gravitación Universal.



Problema de Sitnikov

Este ejemplo nos muestra cómo el papel destacado de lo regular en la ciencia se debe en buena parte a que vivimos girando en torno a una estrella simple. ¡Un Kepler situado en un planeta como P se habría visto obligado a abandonar su búsqueda de leyes regulares para el movimiento de su sistema solar!

*Una lotería aleatoria y determinista
a la vez*

VEAMOS ahora un sistema dinámico de aspecto muy simple que equivale a una sucesión de juegos de lotería, o sea que es aleatorio, a pesar de ser al mismo tiempo determinista. Se trata de un sistema discreto, lo que significa que el tiempo toma sólo valores enteros (1, 2, 3 ..., n , ...) (ejemplos de sistemas discretos son la evolución de la economía por años o la de una población de microbios por días).

Nuestro sistema es de la clase llamada de Bernoulli, en honor de este matemático y físico suizo. Los valores de su única variable $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{10} \dots$ están todos comprendidos entre 0 y 1. Su ley de movimiento es la siguiente: para calcular el valor de x en el tiempo $k + 1$, se toma su valor en el tiempo k , se multiplica por diez y se le quita la parte entera (matemáticamente esto se escribe $x_{k+1} = \text{PD}(10 x_k)$ donde PD significa parte decimal, ecuación del tipo conocido como de diferencias finitas). Nótese que las operaciones necesarias son de una gran simplicidad; también que toda la sucesión x_k está completamente determinada por el dato inicial x_0 , de manera similar a lo que ocurre en la dinámica newtoniana. Por ello llamaremos *trayectoria* a la sucesión x_k .

Tomemos como caso particular $x_0 = 0,414214\dots$, la raíz de dos menos uno. Es fácil ver que entonces $x_1 = 0,14214\dots$, $x_2 = 0,4214\dots$, $x_3 = 0,214\dots$, $x_4 = 0,14\dots$, $x_5 = 0,4\dots$ Para entender la dinámica del sistema, notemos que multiplicar por diez equivale a correr la coma decimal un lugar a la derecha y tomar la parte decimal, a restar la parte entera, por lo que para pasar de un tiempo al siguiente hay que *borrar* el primer decimal: vemos que la evolución hace que se pierdan datos, es decir, que se *pierde información* sobre el estado del sistema.

Este sistema tiene varias propiedades interesantes:

1. Por muy próximos que sea dos datos iniciales, las trayectorias correspondientes no se parecen en nada, al cabo de un tiempo suficiente. Si sus primeras n cifras son iguales, a partir del tiempo $n + 1$ son totalmente distintas. O sea que *hay efecto mariposa*, porque las trayectorias se separan exponencialmente (cada unidad de tiempo, los errores se multiplican por 10).

2. En cada paso temporal se pierde la información correspondiente al valor de una cifra (3,3 bits). Como sólo se puede conocer el dato inicial con una cantidad finita de información, ésta acaba por perderse completamente. O sea, que el futuro del sistema es inconocible del todo al cabo de un cierto tiempo. Tenemos así un sistema que es, a la vez, determinista e impredecible.

3. La evolución en grano grueso puede estudiarse dividiendo el intervalo entre 0 y 1 en diez subintervalos, numerados de 0 al 9, y asignando el número correspondiente a x_k . La sucesión correspondiente coincide con la de las cifras decimales de x_0 y es completamente aleatoria, en general. Un grupo de expertos en estadística no podría distinguirla de la sucesión de resultados de jugar sucesivamente una lotería con 10 números.

Por tanto, nuestro sistema es: a) determinista; b) caótico por tener efecto mariposa y no seguir sus movimientos ninguna pauta regular; d) impre-

decible al cabo del tiempo y e) equivalente al juego de lotería. Nótese que sería predecible si conociésemos el dato inicial con infinitas cifras decimales y pudiésemos manejar una cantidad infinita de información.

El número π y la biblioteca de Babel de Borges

UNA de las propiedades más sorprendente de la articulación del azar y el determinismo es que la emergencia del orden —es decir de estructuras organizadas, características del mundo evolutivo— se realiza siempre en las zonas de contacto entre el caos y el comportamiento regular. Ocurre que, por ser el caos determinista y azaroso, sirve de vínculo entre los dos términos de la antinomia de Demócrito. Para entender cómo el orden se instala en los repliegues de lo aleatorio, recordemos uno de los cuentos fantásticos de Borges, *La biblioteca de Babel* (1). En él se describe, como metáfora del mundo, una ingente biblioteca conteniendo una infinidad de libros cuyos textos han sido escritos completamente al azar. Todos tienen 410 páginas de 40 renglones de 80 letras cada uno, usando 25 signos ortográficos distribuidos al azar (por ejemplo, uno contiene la repetición constante de las tres letras «MCV»). La mayoría carecen de sentido, pero entre ellos están necesariamente todas las obras escritas por la humanidad, traducidas a un mismo alfabeto; tenemos, pues, orden escondido entre el azar.

Volvamos ahora al sistema de Bernouilli y tomemos como semilla el famoso número $\pi = 3,141591\dots$ (o su parte decimal $\pi - 3$). Como ocurre con la casi totalidad de los números reales, las cifras decimales de π están distribuidas de manera por completo aleatoria, sin seguir ninguna pauta regular. Las diez cifras aparecen con la misma frecuencia, ocurriendo lo mismo con todos los pares de cifras consecutivas y con todas las cadenas de k de ellas (así, 493 aparece con la misma frecuencia que 205, una vez por cada mil tripos, en promedio). Ello implica que cualquier cadena, por larga que sea, debe aparecer infinitas veces en la sucesión de cifras decimales de π .

Sin embargo, esa sucesión aleatoria se puede obtener mediante un esquema determinista, basado en la serie $\pi = 4(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots)$ (este procedimiento es muy simple y da el resultado correcto; es poco conveniente desde el punto de vista práctico por su lentitud: hay esquemas más eficaces, pero eso no afecta a este argumento. Se obtiene así la sucesión alter-

(1) En el libro *Ficciones*, Alianza-Emece, Madrid, 1972.

nada 4; 2,66; 3,466; tomando 10 sumandos, 3,04; con 11, 3,23). O sea que la sucesión de cifras significativas de π es determinista y aleatoria a la vez. Supongamos que usamos un alfabeto numérico; por ejemplo, escribiendo π en base 2, como una cadena de ceros y unos, o en base 60, de modo que cada cifra represente una letra o un símbolo ortográfico. El número π sería entonces un texto aleatorio incomprensible, en el que de vez en cuando se podría leer algo con sentido; por ejemplo, «luz» o «sol», más espaciadamente «luna», más aún «montaña»; esperando suficientemente, podremos leer el Quijote o el premio Planeta del año 2000, aún no escrito. De hecho, en esa sucesión están incluidos todos los textos de la humanidad, toda su sabiduría, todos los tratados de ciencia o de historia, todas las obras de literatura escritas o por escribir y todos los periódicos del mundo. Podemos, pues, decir que el número π (o cualquier número normal) es un Aleph, ese oscuro agujero en una pared de otro cuento de Borges, por el que se podía ver todo lo ocurrido en cualquier tiempo y en cualquier lugar.

Quizá este ejemplo parezca demasiado matemático y poco intuitivo. Pongamos otro más realista basado en el sistema solar (recordemos que su tiempo de Liapunov es de decenas de millones de años). Vamos a inscribir una frase en sus datos iniciales. Sea por ejemplo: «La memoria es fuerza oscura para que el alma se enamore de lo que perdura» (Jorge Guillén). Escribámosla al modo de un ordenador, como una sucesión de ceros y unos; después tomemos el estado actual del sistema (sus posiciones y velocidades), también expresable como otra sucesión de ceros y unos y pongamos nuestro verso en la cola (o sea como las últimas cifras decimales de su estado). Esto significa que el sol y los planetas lo están recitando.

Si hacemos un cálculo del futuro del sistema, la imprecisión aumenta sin cesar, por lo que las cifras que expresan el poema se irán perdiendo necesariamente; al cabo de los años, sólo quedará «La memoria es fuerza oscura», sin saber para qué y, más tarde, «La memoria es» y luego nada: se habrá perdido todo el mensaje.

Conclusión

LAS leyes naturales hoy aceptadas combinan en varios grados el azar y la necesidad, las probabilidades y el determinismo. En especial, los llamados movimientos caóticos son impredecibles, a pesar de que siguen una ley formalmente determinista. La explicación de esta aparente contradicción es que no existe para ellos ningún procedimien-

to matemático finito (es decir, realizable con un conjunto finito de operaciones matemáticas elementales) que permita resolver las ecuaciones del movimiento para todo el tiempo futuro. Ni podría haberlo, pues sería necesario poder manejar cantidades infinitas de información (las infinitas cifras decimales de los datos iniciales, cosa imposible para seres finitos).

El signo del caos es el efecto mariposa, es decir, el crecimiento inevitable, violento y errático de las imprecisiones (técnicamente, de los errores) del conocimiento que se tiene de un sistema, lo que hace que cualquier proceso matemático vaya perdiendo precisión hasta resultar inválido.

El ritmo a que esto ocurre viene medido por un tiempo característico llamado de Liapunov que depende de cada caso; puede ser de centésimas de segundo o de millones de años. Los sistemas son impredecibles para tiempos mayores que su tiempo de Liapunov, pero no para tiempos menores, dependiendo de la precisión exigida. Por eso, cualquier predicción de un sistema caótico se refiere a un intervalo temporal.

El mecanicismo decimonónico que creía poder predecir hasta los detalles finos de todo se ha hundido completamente. Pero conviene advertir que, impulsado desde la biología, ha surgido en los últimos años un nuevo determinismo, menos radical, que combina el determinismo con las probabilidades. Aparece a menudo con una fuerte carga ideológica, lo mismo que su antecesor del XIX que provenía sobre todo de la física.