La predicción económica. Los modelos ARMA como sistemas lineales e invariantes en el tiempo (L.T.I.)

Autora: *Inés Portillo García*
Universidad Pontificia Comillas

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo resaltar la relación existente entre el modelado de series temporales utilizado en Econometría y las técnicas habitualmente empleadas en el ámbito de la ingeniería denominado Procesado (o Tratamiento) Digital de Señales. Una serie temporal es una señal en tiempo discreto. Esta relación permite utilizar el amplio cuerpo de doctrina y de técnicas existentes en este último ámbito para modelar, procesar, representar, predecir y, en general, extraer información de las series temporales que aparecen habitualmente en economía. Un claro ejemplo es el modelado de series temporales cortas para predicción, problema importante en el ámbito económico y al que se pueden aplicar procedimientos bien conocidos dentro del Tratamiento Digital de Señales, como los métodos basados en la autoestructura de la matriz de autocorrelación de la señal (serie temporal).

Palabras clave: Series temporales; Señales; Procesado Digital de Señales; Modelos lineales.

Abstract

The objective of this paper is to point out the relationship between the time series modelling used in Econometrics and the techniques frequently used in Digital Signal Processing. A time series is a discrete time signal. This relationship makes it possible use the large body of knowledge and the high number of techniques of application in this last area in order to model, process, represent, predict and in general to extract information from the time series frecuently encountered in Economy. A clear example is the short time series modelling applied to prediction, an important problem in economy, and where well-known algorithms coming from the Digital Signal Processing area may be applied: for instance, methods based on the eigenstructure of the signal (time series) autocorrelation matrix.

Key words: Time series; Signals; Digital Signal Processing; Linear Models.

Recibido: 04.04.2009
Aceptado: 22.04.2009

I. Introducción

Una serie temporal en el ámbito económico se puede ver como una señal en el ámbito del Procesado Digital de Señales. Cuando se trata de abordar su modelado, puede resultar eficaz tratar de aplicar métodos avanzados de tratamiento digital de señales. El soporte básico para este tratamiento es tan sencillo como que una señal procesada digitalmente, es decir, con un tratamiento en tiempo discreto, no es otra cosa que una serie temporal, representante de un proceso estocástico, con un atractivo añadido: el de poder utilizar el amplio cuerpo de doctrina existente en este campo. Aparecen dos métodos fundamentales de modelado de dichas señales (series): modelado en el dominio del tiempo y modelado en el dominio de la frecuencia [Pintelon 1999].

Partiendo de esta idea, este trabajo se plantea con un doble objetivo. En primer lugar, se dará una visión general de los procedimientos empleados para el tratamiento que se propone de series temporales, con la intención de que sirva como referencia y marco general de trabajo para investigaciones posteriores. En segundo lugar, se aplicarán esas ideas a los modelos lineales de series temporales.

El presente trabajo está basado en la viabilidad de la aplicación de algoritmos avanzados de Procesado Digital de Señales al campo de la Economía, para el modelado y predicción de series económicas, Esta viabilidad está basada en el hecho de que los modelos clásicos de predicción, modelos ARMA, y también los ARIMA, sin más que diferenciar las veces necesarias, pueden considerarse, desde un punto de vista teórico y práctico, como sistemas lineales invariantes en el tiempo, los denominados sistemas L.T.I.(linear-time-invariant).

La utilización de los sistemas L.T.I. es obligada debido a su necesidad para el análisis de las series temporales en el dominio de la frecuencia, análisis mucho más rico en términos de interpretación, pero necesitado de técnicas matemáticas más complejas.

II. Sistemas en tiempo discreto y dualidad tiempo-frecuencia

En la presente sección se hará una breve descripción y caracterización de los sistemas en tiempo discreto y más concretamente, de los denominados sistemas lineales e invariantes en el tiempo, (LTI, linear-time-invariant), en la dualidad de sus dominios, esto es, en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. En el dominio del tiempo se hará referencia a la operación de convolución, que permite obtener la salida de un sistema LTI a cualquier tipo de serie temporal de entrada, presentándose las ecuaciones en diferencias como un método alternativo para la descripción de la relación entrada-salida de un sistema LTI. Los sistemas LTI que pueden ser descritos o caracterizados mediante una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes constituyen una parte muy importante de los sistemas LTI, tanto desde el punto de vista teórico como desde la perspectiva de las aplicaciones prácticas. Se describirá también cómo se puede obtener la respuesta al impulso del sistema a partir de la ecuación en diferencias, cuya solución se expresa como la suma de la solución homogénea, que representa la respuesta del sistema cuando la entrada es cero, y la solución particular que es la respuesta del sistema a una serie de entrada particular. En el dominio de la frecuencia se procederá a reseñar los aspectos más relevantes de las series de Fourier y de la transformada de Fourier de series temporales, caracterización ésta en el dominio de la frecuencia, enunciando brevemente sus principales propiedades. Se procederá también a caracterizar los sistemas en este dominio a través de la denominada respuesta en frecuencia, analizando las características del análisis frecuencial de los sistemas LTI. Por último, se procederá a definir la autocorrelación, resaltando sus principales propiedades y haciendo referencia a los momentos estadísticos de las series temporales de entrada y salida de un sistema LTI.

II.1. Sistemas en tiempo discreto

Un sistema en tiempo discreto, o simplemente un sistema discreto, puede entenderse como un algoritmo que realiza operaciones sobre series temporales; más concretamente, un sistema discreto opera sobre una serie de entrada $x[n]$, para generar otra serie temporal de salida $y[n]$, denominada respuesta del sistema. En esta situación, se dice que $x[n]$ es transformada por el sistema en $y[n]$, relación que se expresa en forma general:

$$y[n] = T(x[n]) \tag{1}$$

donde el símbolo T representa la transformación y desde un punto de vista matemático no es más que un operador.

Existen distintas maneras de caracterizar un sistema. Una de ellas, que se realiza en el dominio del tiempo, es la descripción entrada-salida.

La descripción entrada-salida consiste en definir la relación existente entre la entrada y la salida de un sistema. En este sentido el sistema se comporta como una "caja negra", siendo su estructura interna desconocida o ignorada.

Se podría ilustrar con bastantes ejemplos que, en general, la salida de un sistema en un instante de tiempo $n = n_0$ no depende exclusivamente de la entrada en el instante considerado, sino también de los valores de la entrada anteriores y posteriores a n_0. Para evitar este efecto "acumulativo" en el que la salida en un instante n_0 es el resultado de combinar la entrada en el instante considerado y todas las que han sido aplicadas anteriormente al sistema y poder así, consecuentemente, determinar unívocamente su salida, $y[n]$, $n \geq n_0$, se suele añadir una condición inicial que consiste en considerar que el sistema está inicialmente en reposo, o lo que es equivalente, que el sistema está en reposo en $n=-\infty$, con lo que se consigue que la salida $y[n]$ esté unívocamente determinada por la entrada considerada.

En el análisis de sistemas discretos resulta conveniente la clasificación de los mismos según las propiedades generales que satisfagan, tanto es así que las técnicas matemáticas a utilizar para el análisis de los sistemas dependerán de su clasificación.

Atendiendo a distintos criterios o características, los sistemas se clasifican en:

1.- <u>Sistemas estáticos y sistemas dinámicos</u>

Un sistema discreto es estático o sin memoria cuando su salida en un instante temporal cualquiera, n, depende exclusivamente de la muestra de entrada en ese mismo instante y no de muestras de entrada pasadas o futuras. En caso contrario el sistema será dinámico o con memoria, pudiendo ser ésta finita o infinita.

2.- <u>Sistemas invariantes en el tiempo y sistemas variantes en el tiempo</u>

Si representamos el sistema mediante la transformación T, será invariante cuando:

$$x[n] \xrightarrow{T} y[n] \Rightarrow x[n-k] \xrightarrow{T} y[n-k] \tag{2}$$

para cualquier entrada y cualquier desplazamiento temporal k. En caso contrario el sistema será variante con el tiempo.

3.- <u>Sistemas lineales y sistemas no lineales</u>

Un sistema será lineal si satisface el principio de superposición que requiere, para su cumplimiento, que la respuesta del sistema a una suma ponderada de series temporales de entrada sea igual a la misma suma ponderada de las salidas correspondientes a cada una de las series de entrada. Esto es:

$$T[a_1x_1[n]+a_2x_2[n]] = a_1T[x_1[n]]+a_2T[x_2[n]] \quad \forall\, a_1, a_2, x_1[n], x_2[n] \qquad (3)$$

lo que pone de manifiesto las propiedades de homogeneidad y aditividad de un sistema lineal. Cuando no cumple el principio de superposición el sistema es no lineal.

4.- Sistemas causales y sistemas no causales

Un sistema discreto es causal si la salida del mismo en cualquier instante temporal, depende exclusivamente de las entradas pasadas y presentes pero no de las futuras, es decir, la salida de un sistema causal verifica la siguiente ecuación:

$$y[n] = F[\, x[n], x[n-1], x[n-2],.....] \qquad (4)$$

siendo F cualquier función. En caso contrario se dirá que el sistema es no causal.

5.- Sistemas estables y sistemas no estables

Un sistema se denomina estable (BIBO, *bounded input-bounded output)* si y solo si toda entrada acotada produce una salida también acotada, esto es:

$$\exists \text{ dos cotas } M_x \text{ y } M_y \text{ tal que si } \left|x[n]\right| < M_x < \infty, \text{ entonces } \left|y[n]\right| < M_y < \infty$$

si por el contrario alguna entrada acotada produce una salida no acotada el sistema es inestable.

II.1. Análisis en el dominio del tiempo de sistemas lineales e invariantes

Dos son los métodos para el análisis de un sistema lineal en el dominio del tiempo. Un primer método consiste en la obtención de la solución de la ecuación de entrada-salida del sistema, que para el caso de los sistemas LTI descritos por ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes, adopta la forma:

$$y[n]= -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (5)$$

que se deberá resolver por los procedimientos habituales. Hay que tener en cuenta que, ya que la definición anterior corresponde a una ecuación en diferencias, para la definición completa del sistema deben incluirse también las N condiciones iniciales, que serán de la forma:

$$y[n_0]=c_0,\ y[n_0-1]=c_1,\ \ldots\ ,y[n_0-N+1]=c_{N-1} \qquad (6)$$

La ecuación (6) es válida tanto para sistemas no recursivos, esto es, sistemas cuya salida en un instante determinado no depende de los valores anteriores de su salida, como para el caso de sistemas recursivos cuya salida en el instante considerado depende también de los valores pasados de la salida del mismo.

Puede demostrarse que un sistema descrito por la ecuación en diferencias (6) es lineal e invariante en el tiempo si cumple la condición de reposo inicial. Esta condición establece que si la entrada $x[n]=0$ para todo $n<n_0$, entonces la salida $y[n]=0$ para todo $n<n_0$.

El segundo método de análisis de un sistema lineal consiste, básicamente, en la descomposición de la serie de entrada en una suma ponderada de impulsos unitarios d[n-k], series temporales elementales definidas así:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0 \\ 0 & \text{para } n \neq 0 \end{cases} \tag{7}$$

donde k representa el retraso del citado impulso. En consecuencia la serie de entrada puede expresarse en la forma:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{8}$$

es decir, como una suma ponderada de impulsos unitarios desplazados.

Si representamos la respuesta del sistema a un impulso unitario en el instante $n = k$, como $h[n,k]$, esto es:

$$h[n,k] = T(\delta[n-k]) \text{ con } -\infty < k < +\infty \tag{9}$$

la respuesta del sistema a cualquier serie temporal de entrada se expresa:

$$y[n] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, T\left[\delta[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h\left[n,k\right] \tag{10}$$

lo que es clara consecuencia del principio de superposición de los sistemas lineales. Si además el sistema es invariante en el tiempo, que es el caso que nos ocupa, la expresión anterior se simplifica quedando reducida a:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h\left[n-k\right] \tag{11}$$

Esta última expresión, que se conoce con el nombre de convolución, pone de manifiesto que un sistema LTI queda caracterizado en su totalidad, en el dominio del tiempo, por su respuesta al impulso unitario, esto es, por h[n]. En lo que sigue denotaremos la operación de convolución con un asterisco, con lo que se puede escribir:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] \qquad (12)$$

Un sistema LTI será causal si y sólo si su respuesta al impulso es 0 para valores negativos de n con lo que la convolución para este tipo de sistemas se puede expresar:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]\, x[n-k] \qquad (16)$$

Cualquier aplicación en tiempo real exige causalidad, puesto que no se dispone de los valores futuros de la serie de entrada.

En cuanto a la estabilidad de un sistema y sus implicaciones sobre las características del mismo, únicamente resaltaremos que un sistema LTI será estable si cumple la condición necesaria y suficiente de que su respuesta al impulso sea absolutamente sumable, esto es:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < +\infty \qquad (17)$$

lo cual exige que h[n] tienda a cero cuando n tienda a infinito, lo que a su vez implica que cualquier entrada de duración finita produzca una respuesta de amplitud decreciente y que tienda a anularse con el tiempo.

Para terminar este apartado haremos una subdivisión de los sistemas LTI en:

1.- Sistemas con respuesta impulsiva finita (FIR, *finite-duration impulse-response*), que son aquellos que tienen respuesta al impulso cero fuera de un intervalo finito, en este caso:

$$h[n] = 0, \quad n<0 \;\text{ y }\; n \geq M \qquad (18)$$

con lo que la convolución se expresaría:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]\, x[n-k] \qquad (19)$$

y en esta situación el sistema se comporta como una ventana que sólo deja ver las M muestras más recientes de la serie de entrada, despreciando todas las muestras anteriores, por lo que se dice que un sistema FIR tiene una memoria finita de M muestras.

2.- Sistemas con respuesta impulsiva infinita (IIR, *infinite-duration impulse-response*), cuya salida de acuerdo con la convolución se expresaría:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]\, x[n-k] \qquad (20)$$

Se podría demostrar fácilmente que una condición necesaria y suficiente de estabilidad de un sistema IIR causal, descrito mediante una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes, es que todas las raíces de su polinomio característico sean, en módulo, menores que uno.

II.2. Análisis de sistemas lineales invariantes en el tiempo en el dominio de la frecuencia

Se puede realizar también el análisis de los sistemas LTI en el dominio de la frecuencia. En esta situación, las series de entrada y de salida del sistema se representan mediante sinusoides o exponenciales complejas (transformada y desarrollo en serie de Fourier de las series temporales aperiódicas o periódicas, respectivamente). Las secuencias sinusoidales y exponenciales complejas son especialmente importantes para representar series temporales debido a su carácter de autofunciones de un sistema LTI lo que implica que la respuesta a una entrada sinusoidal es también sinusoidal de igual frecuencia que la entrada y de amplitud y fase determinadas por el sistema. Para proceder al análisis de los sistemas LTI en el dominio de la frecuencia es necesario, previamente, representar las series temporales en este dominio.

Recordaremos aquí brevemente la transformada de Fourier como representación de series temporales en el dominio de la frecuencia. Es básicamente una descomposición de las series temporales en exponenciales complejas. Con esta descomposición se dice que la serie temporal está representada en el dominio de la frecuencia. La Transformada de Fourier de una serie temporal aperiódica de energía finita se define así:

$$X(\omega)= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \qquad (21)$$

siendo w = 2πf, con lo que conseguimos una descomposición de x[n] en sus componentes en frecuencia. X(ω) es periódica de periodo 2π, lo que se comprueba de manera inmediata:

$$\begin{aligned} X(\omega+2\pi k) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp\left(-j(\omega+2\pi k)n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j\omega n)\exp(-j2\pi kn) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j\omega n) = X(\omega) \quad (22) \end{aligned} \qquad (22)$$

Esto tiene como consecuencia que para representar en el dominio de la frecuencia cualquier serie temporal en tiempo discreto basta un intervalo de frecuencias de (-π,π] o de (0, 2π], lo que a su vez se deriva del hecho de que dos sinusoides en tiempo discreto cuyas frecuencias están separadas un múltiplo entero de 2π son iguales.

La convergencia de la transformada de Fourier y por tanto su existencia, está garantizada por la condición suficiente de que la serie temporal x[n] sea absolutamente sumable, es decir:

$$\sum_{n=\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^2 < \infty \tag{23}$$

La relación entre la energía de la serie temporal y X() se denomina relación de Parseval y se expresa así:

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X(\omega) \right|^2 d\omega \tag{24}$$

El espectro X(ω), en el caso más general, es una función compleja de la frecuencia (ω=2πf), presentando simetría par en el caso de series temporales reales, por lo cual en ese caso el intervalo de frecuencias puede limitarse a la mitad del periodo (0,]. La descripción de la serie temporal en el dominio de la frecuencia queda garantizada con su espectro en el mencionado intervalo.

Como en Física, el término espectro se emplea para referirse al contenido en frecuencia de una serie temporal. El proceso de obtención teórica del espectro de una serie temporal, utilizando herramientas matemáticas, se denomina análisis espectral. El proceso de estimación del espectro de una serie temporal en la práctica se denomina estimación espectral.

La posibilidad de representación de una serie temporal en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia es lo que hace surgir una dualidad en el modelado de la misma: modelado en el dominio del tiempo y modelado en el dominio de la frecuencia. El elegir uno u otro dependerá de que los objetivos que se pretenden sean, desde un punto de vista operativo, más fácilmente alcanzables.

Un ejemplo muy claro de esta dualidad nos lo proporciona un modelo autorregresivo (AR). En el dominio del tiempo el modelo AR se representa mediante la ecuación [Makhoul1975a]:

$$\hat{x}[n] = -\sum_{i=1}^{L} a_i \hat{x}[n-i] + Gu[n] \tag{25}$$

es decir, el valor en un instante n es una combinación lineal de L valores pasados más un ruido blanco u[n] multiplicado por un factor de ganancia G. Los coeficientes de dicha combinación lineal se calculan minimizando el error e definido mediante la expresión:

$$\varepsilon = E\left[\left| e[n] \right|^2 \right] = E\left[\left| x[n] - \tilde{x}[n] \right|^2 \right] \tag{26}$$

donde [n] es una combinación lineal de L muestras anteriores:

$$\tilde{x}[n] = -\sum_{i=1}^{L} a_i x[n-i] \tag{27}$$

y $E[\cdot]$ representa el operador esperanza matemática. En términos de la autocorrelación[1], definida como:

$$r_{xx}[k] = E\left[x[n]x[n+k]\right] \tag{28}$$

esto es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones de Yule-Walker [Kay 1988a]:

$$\mathbf{Ra=r} \tag{29}$$

Donde **R** representa la matriz de correlación definida por:

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & .... & .... & r_{xx}[-(L-1)] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & .... & .... & r_{xx}[-(L-2)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[L-1] & r_{xx}[L-2] & .... & .... & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \tag{30}$$

y los vectores **a** y **r** definidos por:

$$\mathbf{a}=\left[a_1, a_2, ...a_L\right]^T \tag{31}$$

$$\mathbf{r}=\left[r_{xx}[0], r_{xx}[1], ...r_{xx}[L-1]\right]^T \tag{32}$$

son respectivamente los coeficientes del modelo AR y el vector de autocorrelación. Según esto, es necesario conocer la matriz de correlación para obtener los parámetros que definen el modelo, lo cual implica a su vez, un conocimiento exacto de estadísticos de segundo orden de la serie temporal. En la práctica, dado que dicho conocimiento no es posible, lo que se hace es utilizar estimadores para la autocorrelación. Dos son los estimadores más utilizados. El primero de ellos, definido por:

$$r[k] = \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x[n]\, x[n+k] \tag{33}$$

[1] En al campo de Procesado Digital de Señales, es habitual eliminar la media de la serie bajo estudio, con lo que las definiciones de matriz de correlación y de covarianza coinciden. Si no fuera así, en la definición de matriz de covarianza debe extraerse la media. Adicionalmente, en la definición de esas matrices, se asume que el proceso estocástico bajo estudio es estacionario en sentido amplio en el tramo de serie bajo estudio, y en particular que la varianza en dicho tramo puede asumirse constante.

es insesgado (es decir, su esperanza coincide con la autocorrelación teórica) y el segundo, sesgado, definido como:

$$r[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x[n]\, x\, [n + |k|] \tag{34}$$

para valores de k, $0 \leq |k| \leq N-1$. Ambos estimadores son una aproximación de la siguiente expresión para la autocorrelación:

$$r_{xx}[k] = \lim_{M \to \infty} \left\{ \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} x[k]\, x\, [n+k] \right\} \tag{35}$$

supuesto que el proceso aleatorio es ergódico en la autocorrelación (el valor de la autocorrelación definido por (35) converge con probabilidad 1 a la autocorrelación del proceso). Conviene observar cómo esta expresión pone de manifiesto el efecto del número de puntos utilizados para la estimación.

Pero el modelo AR puede representarse también en el dominio de la frecuencia [Makhoul 1975b]. En esta situación se estima el espectro $S_{xx}(w)$ de la serie en estudio por una función con sólo polos:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{G^2}{|A(\exp(j\omega))|^2} \tag{36}$$

donde el error a minimizar es:

$$\varepsilon = \frac{G^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{S_{xx}(\omega)}{\hat{S}_{xx}(\omega)} d\omega \tag{37}$$

Makhoul demuestra [Makhoul 1975b], que esto equivale a resolver las mismas ecuaciones de Yule-Walker, pero con la autocorrelación definida por:

$$r[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega) \exp\,(-j\omega m)\; d\omega \tag{38}$$

pero por el teorema de Wiener-Khinchin [Marple 1987], (38) es igual a la función de autocorrelación definida anteriormente en (28). Queda claro así que, además de posible, es formalmente equivalente obtener las ecuaciones que definen los parámetros del modelo AR ajustando en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. Este ejemplo, además, pone de manifiesto que si trabajamos en el dominio de la frecuencia para la obtención de la autocorrelación, necesitamos estimar S_{xx}, para lo cual serán de aplicación técnicas de estimación espectral que calculen de forma fiable la densidad espectral de potencia. La estimación espectral es por tanto una herramienta de modelado adecuada cuando se trabaja en el dominio de la frecuencia.

Haciendo uso de la dualidad entre el dominio de la frecuencia y del tiempo se podrá hablar también de series limitadas en el tiempo si:

$$x[n] = 0 \quad n \leq N_1 \;\; y \;\; n \geq N_2 \tag{39}$$

En general una serie de corta duración tendrá un gran ancho de banda y una serie de ancho de banda pequeño tendrá una larga duración.

Algunas propiedades de la Transformada de Fourier de especial importancia son:

1.- Teorema de convolución

Si $x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ y $x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

entonces

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)X_2(\omega) \tag{40}$$

Es decir, si convolucionamos dos series en el dominio del tiempo, estamos multiplicando sus espectros en el dominio de la frecuencia. Este teorema constituye una potente herramienta en el análisis de sistemas LTI.

2.- Teorema de Wiener-Khintchine

Sea $r_{xx}[l]$ la función de autocorrelación de un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio. Entonces:

$$r_{xx}[l] \xleftrightarrow{F} S_{xx}(\omega) \tag{41}$$

lo que evidencia que la densidad espectral de un proceso aleatorio real es la transformada de Fourier de su función de autocorrelación, con lo que la función de autocorrelación y su densidad espectral contienen idéntica información sobre el proceso, aunque ninguna de estas dos funciones nos informa sobre la fase, con lo cual resulta imposible reconstruir de manera unívoca la serie a partir de una cualquiera de ellas.

3.- Teorema de Parseval

Si $x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ y $x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]\, x_2^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega) X_2^*(\omega)\, d\omega \tag{42}$$

en el caso particularmente importante en que $x_1[n] = x_2[n] = x[n]$ se obtendría:

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega)\, d\omega \qquad (43)$$

donde E_x es la energía de la serie.

Se procede como parte última de este apartado a desarrollar las características en el dominio de la frecuencia de los sistemas LTI. Las series básicas que se utilizarán como entrada del sistema en este desarrollo serán las exponenciales complejas o funciones sinusoidales, aunque la metodología que se desarrollará será también de aplicación a otras series aperiódicas que pueden expresarse como una superposición de exponenciales complejas. Como se ha comentado anteriormente, la salida de cualquier sistema LTI se puede expresar utilizando la convolución como:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k] \qquad (44)$$

En esta relación entrada-salida, el sistema lineal e invariante queda totalmente caracterizado, en el dominio del tiempo, por su respuesta al impulso unidad, como se ha comentado con anterioridad. Para obtener una caracterización del sistema en el dominio de la frecuencia se excita el mismo con una exponencial compleja, esto es, con una serie de la forma:

$$x[n] = Ae^{j\omega n} \qquad (45)$$

donde A es cualquier amplitud y w cualquier fase del intervalo fundamental $(-\pi,\pi]$. Sustituyendo en la expresión de y[n] se obtiene:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Ah[k]\, e^{j\omega(n-k)} = A\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, e^{-j\omega k}\right] e^{j\omega n} \qquad (46)$$

en esta expresión, lo que aparece entre corchetes es una función de la frecuencia que denotaremos como $H(\omega)$ y que no es otra cosa que la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema:

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, e^{-j\omega k} \qquad (47)$$

Obviamente, $H(\omega)$ existe si el sistema es estable BIBO, esto es, si $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < +\infty$
Con todo esto, la respuesta del sistema se expresaría:

$$y[n] = AH(\omega)e^{j\omega n} \qquad (48)$$

con lo que se llega a la conclusión de que la respuesta del sistema a una entrada exponencial compleja es la misma exponencial compleja modificada, únicamente, por el factor multiplicativo H(w), por lo que se puede concluir que la exponencial compleja es una autofunción del sistema LTI (una autofunción de un sistema es una serie de entrada que produce una serie de salida idéntica salvo un factor multiplicativo constante) y el factor multiplicativo, H(w), es el autovalor de dicho sistema estando evaluado en la misma frecuencia que la entrada. H(w) es, en general, una función compleja de la variable frecuencia w, que en forma polar se expresa:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\Theta(\omega)} \tag{49}$$

siendo $|H(\omega)|$ su módulo y $\Theta(\omega)$ el desplazamiento en fase a la frecuencia w provocada por el sistema sobre la serie de entrada.

Por otro lado, y a la vista de su expresión, H(w) es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema, h[k], lo que implica que es una función periódica de periodo 2π. h[k] y $H(\omega)$ están también relacionados mediante la expresión de la transformada inversa:

$$h(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)e^{j\omega k}d\omega \tag{50}$$

Para un sistema LTI con respuesta al impulso real, las funciones módulo y fase de H(w), presentan propiedades de simetría, siendo el módulo función par de w y la fase función impar de w. Por lo tanto, si conocemos el módulo y la fase de H(w) en el intervalo $(0,\pi]$, también los conoceremos en el intervalo $(-\pi,0]$.

De todo esto puede concluirse que $H(\omega)$, o de forma equivalente su módulo y su fase, caracterizan totalmente al sistema frente a una entrada sinusoidal de frecuencia arbitraria. $H(\omega)$ define, por tanto, la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia y se denomina respuesta en frecuencia del sistema y $|H(\omega)|$ y $\Theta(\omega)$, respectivamente, respuesta en módulo y fase del sistema.

Si la entrada del sistema es una combinación lineal de sinusoides, resulta trivial determinar su salida sin más que usar el principio de superposición. Esto es, si la entrada es de la forma:

$$x[n]= \sum_{i=0}^{L} A_i\cos(\omega_i + \phi_i), \text{ con } -\infty \leq n \leq +\infty \tag{51}$$

siendo $\{A_i\}$ y $\{\phi_i\}$ las amplitudes y fases de las sinusoides, la respuesta del sistema es:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{L} A_i|H(\omega_i)|\cos[\omega_i + \phi_i + \Theta(\omega_i)] \tag{52}$$

Dependiendo de la respuesta en frecuencia, sinusoides de diferentes frecuencias se verán afectadas de distinta manera por el sistema, pudiendo verse amplificadas, atenuadas e incluso suprimidas, lo que permite ver un sistema LTI como un filtro que impide que sinusoides de ciertas frecuencias lleguen a la salida. Si la serie de entrada del sistema es aperiódica, el teorema de convolución, ya reseñado, permite obtener la relación en el dominio de la frecuencia para determinar la salida del sistema. Así, si denotamos por x[n] e y[n] la entrada y salida del sistema respectivamente y por h[n] su respuesta al impulso, se tiene que:

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega) \tag{53}$$

donde Y(ω), H(ω) y X(ω) son las respectivas transformadas de Fourier de y[n], h[n] y x[n]. Esta relación evidencia que el espectro de la serie de salida es igual al espectro de la serie de entrada multiplicado por la respuesta en frecuencia del sistema.

El siguiente esquema muestra las relaciones entre la entrada y la salida de un sistema, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia, para sistemas LTI estables BIBO:

$$\begin{array}{c} x[n] \\ X(\omega) \end{array} \xrightarrow{\text{entrada}} \begin{array}{c} \text{LTI} \\ h[n] \\ H(\omega) \end{array} \xrightarrow{\text{salida}} \begin{array}{c} y[n]=h[n]*x[n] \\ Y(\omega)=H(\omega)X(\omega) \end{array}$$

A continuación, se pasará a describir brevemente la relación entre la función de transferencia y la respuesta en frecuencia de un sistema.

Se define la transformada Z de una serie x[n] como:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,z^{-n} \tag{54}$$

siendo, ROC = $\{z \in C / r_1 < |z| < r_2\}$ la región de convergencia de X(z). Si se expresa la variable compleja z en forma polar:

$$z=re^{j\omega} \tag{55}$$

sustituyendo z dentro de la región de convergencia de X(z), obtenemos para la transformada Z de la serie la siguiente expresión:

$$X(z)\big|_{z=re^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[x[n]\,r^{-n}\right]e^{-j\omega n} \tag{55}$$

de donde se deduce que X(z) se puede considerar como la transformada de Fourier de la secuencia $x[n]r^{-n}$. Si X(z) converge para |z|=1:

$$X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,e^{-j\omega n} \tag{56}$$

de donde se desprende que la transformada de Fourier de la serie o secuencia no es otra cosa que su transformada Z evaluada sobre la circunferencia unidad. Si dicha circunferencia unidad no está contenida en la región de convergencia de X(z), la transformada de Fourier, X(ω), no existe. Para que exista la transformada Z de la serie es condición necesaria que la secuencia $\left\{x[n]r^{-n}\right\}$ sea absolutamente sumable para algún valor de r, es decir:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\,r^{-n}\right|<+\infty \tag{57}$$

si esto se cumple solamente para $r>r_0>1$, existe la transformada Z pero no la transformada de Fourier de la serie.

En resumen, para que exista la transformada Z de la serie se requiere que se satisfaga la condición necesaria anterior para alguna región del plano z. Si dicha región contiene a la circunferencia unidad existe la transformada X(ω). Sin embargo la existencia de transformada de Fourier para series de energía finita no garantiza la existencia de transformada Z.

Ya se ha explicado que en el dominio del tiempo, la salida de un sistema LTI para una serie de entrada x[n] se puede obtener como la convolución de dicha entrada con la respuesta al impulso del sistema. La propiedad de convolución de la transformada Z permite expresar esta relación en la forma:

$$Y(z)=H(z)X(z) \tag{58}$$

Donde Y(z) es la transformada Z de la serie temporal de salida, X(z) es la transformada Z de la serie temporal de entrada y H(z) es la transformada Z de la respuesta al impulso del sistema, es decir:

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]\,z^{-n} \tag{59}$$

con lo que:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} \tag{60}$$

H(z) se denomina función de transferencia del sistema y lo caracteriza totalmente en un nuevo dominio, el dominio z, siendo esta caracterización totalmente equivalente a la que se hace en el dominio del tiempo a través de h[n]. La relación de H(z) como cociente entre Y(z) y X(z) es especialmente útil cuando se describe el sistema mediante una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes, esto es, si:

$$y[n]=-\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]+\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k] \tag{61}$$

icade. Revista cuatrimestral de las Facultades de Derecho y Ciencias Económicas y Empresariales, nº 79, enero-abril 2010, ISSN: 1889-7045

En esta situación, calculando la transformada Z a ambos lados y aplicando la propiedad de desplazamiento temporal, se llega a que:

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{62}$$

lo que evidencia un resultado tan importante como que un sistema LTI descrito por una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes posee una función de transferencia racional. Esta última expresión pone de manifiesto que existen dos clases de sistemas LTI especialmente importantes. Si $a_k=0$, $1\leq k\leq N$ esto implica que:

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M}\sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k} \tag{63}$$

En este caso H(z) contiene M ceros cuyos valores están determinados por los parámetros $\{b_k\}$ del sistema y M polos triviales en z=0, y se denomina sistema todo ceros. Obviamente, un sistema de estas características tiene una respuesta al impulso de duración finita (FIR, *finite impulse response*) y se denomina sistema FIR o sistema de media móvil (MA).

En la segunda situación si $b_k=0$, $1\leq k\leq M$ la función de transferencia del sistema queda de la forma:

$$H(z)=\frac{b_0}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}},\ a_0=1 \tag{64}$$

en cuyo caso la función de transferencia H(z) contiene N polos cuyos valores están determinados por los parámetros del sistema $\{a_k\}$ y un cero de orden N, trivial, en el origen z=0. Consecuentemente, H(z) sólo contiene polos no triviales y el sistema se denomina todo polos cuya presencia hace que la respuesta al impulso sea de duración infinita o sistema IIR (IIR, *infinite impulse response*), o sistema autorregresivo (AR). En su forma general, H(z) contiene tanto polos como ceros y el sistema correspondiente se denomina sistema polo-cero (ARMA).

En el caso de que H(z) sea una función racional nos quedaría para la respuesta en frecuencia la expresión:

$$H(\omega)=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{A(\omega)}{B(\omega)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}}=b_0\frac{\prod_{k=0}^{M}\left(1-z_k e^{-j\omega}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-p_k e^{-j\omega}\right)} \tag{65}$$

donde $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son reales pero $\{z_k\}$ y $\{p_k\}$ pueden ser complejos.

A veces resulta interesante expresar el módulo al cuadrado de H(ω) en términos de H(z), para lo cual:

$$|H(\omega)|^2 = \mathrm{H}(\omega)\mathrm{H}^*(-\omega) \qquad (66)$$

Para funciones de transferencia racionales:

$$\mathrm{H}^*(\omega) = \mathrm{b}_0 \frac{\prod_{k=0}^{M}\left(1 - \mathrm{z}_\mathrm{k}^* \mathrm{e}^{-j\omega}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1 - \mathrm{p}_\mathrm{k}^* \mathrm{e}^{-j\omega}\right)} \qquad (67)$$

y como para una función de transferencia racional:

$$H^*\left(\frac{1}{\mathrm{z}^*}\right) = \mathrm{b}_0 \frac{\prod_{k=0}^{M}\left(1 - \mathrm{z}_\mathrm{k}^* z\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1 - \mathrm{p}_\mathrm{k}^* z\right)} \qquad (68)$$

se sigue que $\mathrm{H}^*(\omega)$ se obtiene calculando $\mathrm{H}^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$ sobre la circunferencia unidad. Cuando h[n] es real o de forma equivalente $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son reales, pueden aparecer pares de polos y ceros complejos conjugados. En esta situación, $\mathrm{H}^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \mathrm{H}(z^{-1})$, con lo que $\mathrm{H}^*(\omega) = \mathrm{H}(-\omega)$ y consecuentemente:

$$|H(\omega)|^2 = \mathrm{H}(\omega)\mathrm{H}^*(\omega) = \mathrm{H}(\omega)\mathrm{H}(-\omega) = \mathrm{H}(z)\mathrm{H}(z^{-1})\big|_{z=e^{j\omega}} \qquad (69)$$

De acuerdo con el teorema de correlación para la transformada Z, $\mathrm{H}(z)\mathrm{H}(z^{-1})$ es la transformada Z de la autocorrelación, $\{r_{hh}(m)\}$, de la respuesta al impulso del sistema de donde, por el teorema de Wiener-Khintchine, se sigue que $|H(\omega)|^2$ es la transformada de Fourier de $\{r_{hh}(m)\}$.

Terminaremos este breve apunte de las relaciones entre la función de transferencia y la respuesta en frecuencia con la observación de que, conocida H(z), es inmediato calcular $\mathrm{H}(z^{-1})$ y consecuentemente $|H(\omega)|^2$. Sin embargo el problema inverso, determinar H(z) conocida $|H(\omega)|^2$, no es inmediato debido a que $|H(\omega)|^2$no contiene información acerca de la fase de H(w), lo que hace imposible la determinación unívoca de H(z).

II.3. Correlación de series temporales. Espectros y funciones de correlación

La correlación, sin entrar en contenidos estadísticos sobradamente conocidos, al igual que la convolución, puede verse como una operación matemática definida para un par de series temporales, pero su objetivo es el de cuantificar el grado de asociación lineal o el "parecido o similitud estadística" existente entre las dos series temporales con el fin de extraer información.

Dada una señal x[n], se obtiene la autocorrelación de x[n], definida mediante la secuencia:

$$r_{xx}[l]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,x\,[n-l] \qquad (70)$$

Como habitualmente se trabaja con series temporales de duración finita es usual expresar la correlación y la autocorrelación como sumatorios finitos.

$$r_{xx}[l]=\sum_{n=i}^{N-|k|-1} x[n]\,x\,[n-l] \qquad (71)$$

donde i=1, k=0 para l≥ 0, e i=0, k=l para l<0. Se puede demostrar fácilmente que:

$$|r_{xx}[l]| \leq r_{xx}[0] \qquad (72)$$

lo que significa que la autocorrelación es una secuencia que alcanza su valor máximo para el retardo l=0.

Como ya se ha mencionado,

$$r_{xx}[l]=r_{xx}[-l] \qquad (73)$$

de donde se deduce que la autocorrelación es una función par y consecuentemente es suficiente calcular $r_{xx}[l]$ para l≥ 0. En el caso de que x[n] e y[n] sean dos series periódicas, de periodo N cada una de ellas, las expresiones de la autocorrelación se reducen a

$$r_{xx}[l]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,x\,[n-l] \qquad (84)$$

De gran interés es la obtención de relaciones entrada-salida para sistemas LTI en términos de la correlación. Supongamos que una serie x[n] de autocorrelación conocida $r_{xx}(l)$ se aplica a la entrada de un sistema con respuesta al impulso h[n], lo que produce una salida en el mismo

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,x\,[n-k] \qquad (85)$$

La correlación entre las series de entrada y salida es

$$r_{yx}[l]=y[l]*x[-l]=h[l]*[x[l]*x[-l]] \qquad (86)$$

de donde

$$r_{yx}[l]=h[l]*r_{xx}[l] \qquad (87)$$

con lo que la correlación entre la entrada y la salida de un sistema viene dada por la convolución entre la respuesta al impulso del sistema y la autocorrelación de la serie de entrada. Es decir, podemos considerar la correlación $r_{yx}[l]$ como la salida de un sistema LTI con entrada $r_{xx}[l]$. La autocorrelación de la serie de salida puede expresarse, utilizando las mismas propiedades de la convolución como

$$r_{yy}[l]= r_{hh}[l] * r_{xx}[l] \tag{88}$$

teniendo en cuenta que la autocorrelación de la respuesta al impulso de un sistema existe si dicho sistema es estable, sin más que considerar l=0 se obtiene

$$r_{yy}[0]= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{hh}[k]\, r_{xx}[k] \tag{89}$$

lo que nos proporciona la energía o la potencia de la serie en términos de las autocorrelaciones.

De las expresiones anteriores para la autocorrelación de la salida y la correlación de la entrada y salida de un sistema LTI en las que aparece una convolución, sin más que calcular la transformada Z de estas ecuaciones se tiene

$$S_{yy}(z)=S_{hh}(z)S_{xx}(z)=H(z)H(z^{-1})S_{xx}(z) \tag{90}$$

y calculando esta última sobre la circunferencia unidad ($z=e^{jw}$) se convierte en

$$S_{yx}(\omega)=H(\omega)S_{xx}(\omega) \tag{91}$$

donde $S_{yx}(\omega)$ es la densidad espectral de energía cruzada entre x[n] e y[n]. Análogamente, calculando $S_{yy}(z)$ sobre la circunferencia unidad se obtiene la densidad espectral de energía de salida

$$S_{yy}(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2 S_{xx}(\omega) \tag{92}$$

donde $S_{xx}(w)$ es la densidad espectral de la serie de entrada. Dado que $r_{yy}[l]$ y $S_{yy}(w)$ son un par de transformadas de Fourier:

$$r_{yy}[l]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{yy}(\omega)e^{j\omega l}d\omega \tag{93}$$

La energía total de la serie de salida es

$$E_y= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{yy}(\omega)\, d\omega=r_{yy}[0] \tag{94}$$

A continuación se hace un desarrollo paralelo pero utilizando los momentos estadísticos de la entrada y de salida de un sistema LTI, consideradas como representantes de procesos estocásticos con el fin de relacionar sus características estadísticas. Si suponemos los procesos estocásticos de entrada y salida estacionarios, el valor esperado de la salida y[n] es

$$m_y \equiv E[y[n]] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, E\left[x[n-k]\right] = m_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \qquad (95)$$

Partiendo de la relación de la transformada de Fourier

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n]\, e^{-j\omega k} \qquad (96)$$

se tiene

$$H(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n] \qquad (97)$$

con lo que podemos expresar m_y como

$$m_y = m_x H(0) \qquad (98)$$

La autocorrelación del proceso de salida es

$$\gamma_{yy}[m] = E[y^*[n]y[n+m]] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x^*[n-k] \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h[j]x[n+m-j]\right] = \qquad (99)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h[k]h[j]E\left[x^*[n-k]x[n+m-j]\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h[k]h[j]\gamma_{xx}[k-j+m]$$

que es la expresión de la autocorrelación de salida en términos de la autocorrelación de entrada y de la respuesta al impulso del sistema. Una forma particularmente interesante de esta última expresión aparece cuando el proceso de entrada es ruido blanco, en cuyo caso $m_x=0$, $\gamma_{xx}[m]= \delta[m]$, siendo $=\gamma_{xx}[0]$, en cuyo caso queda para $\gamma_{yy}[m]$ la expresión

$$\gamma_{yy}[m] = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]h[k+m] \qquad (100)$$

La relación encontrada para $\gamma_{yy}[m]$ puede trasladarse al dominio de la frecuencia, calculando la densidad espectral de potencia de $\gamma_{yy}[m]$, esto es

$$S_{yy}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_{yy}[m]e^{-j\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[k]h[l]\gamma_{xx}[k-l+m]\right]e^{-j\omega m} = \qquad (101)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[k]h[l]\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\gamma_{xx}[k-l+m]e^{-j\omega m}\right] = S_{xx}(\omega)\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right]\left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[l]e^{-j\omega l}\right] = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega)$$

que es la relación para la densidad espectral de potencia del proceso de salida en términos de la densidad espectral de potencia del proceso de entrada y de la respuesta en frecuencia del sistema. Para terminar determinaremos la correlación cruzada de la salida y la entrada. Para ello partimos de la expresión de la convolución

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \tag{102}$$

multiplicando ambos lados por x[n-m] y calculando la esperanza se obtiene:

$$E\left[y[n]x^*[n-m]\right]=E\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x^*[n-m]x[n-k]\right] \tag{103}$$

es decir,

$$\gamma_{yx}[m]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]E\left[x^*[n-m]x[n-k]\right]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\gamma_{xx}[m-k] \tag{104}$$

Dado que hemos obtenido una convolución, la expresión equivalente en el dominio de la frecuencia es

$$S_{yx}(\omega)=H(\omega)S_{xx}(\omega) \tag{105}$$

II.4. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo como filtros selectivos en frecuencia

El objetivo del presente apartado es el análisis comparativo de la formulación de los modelos estocásticos univariantes de series temporales en el campo del procesado digital de señales, y compara brevemente dicha formulación con la habitual en el ámbito económico. Para ello se formularán, autorregresivos y los modelos mixtos autorregresivos-medias móviles, todos ellos procesos estocásticos discretos, teniendo en cuenta que su estudio responde a la necesidad, en ambos campos, de poder efectuar predicciones futuras a partir de la serie temporal observada.

La secuencia de datos x[n] será considerada como la salida de un sistema LTI causal excitado por un proceso de ruido blanco.Ya se ha explicado que en el dominio del tiempo, la salida de un sistema LTI para una serie de entrada w[n] se puede obtener como la convolución de dicha entrada con la respuesta al impulso del sistema. La propiedad de convolución de la transformada Z permite expresar esta relación en la forma:

$$X(z)=H(z)W(z) \tag{106}$$

donde X(z) es la transformada Z de la serie temporal de salida, W(z) es la transformada Z del ruido blanco de entrada, H(z) es la transformada Z de la respuesta al impulso del sistema, es decir:

$$H(z)= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} \qquad (107)$$

con lo que:

$$H(z)=\frac{X(z)}{W(z)} \qquad (108)$$

H(z) es la función de transferencia del sistema y caracteriza a dicho sistema en un nuevo dominio, el dominio Z, siendo esta caracterización equivalente a la que se hace en el dominio del tiempo a través de h[n]. La relación de H(z) como cociente entre X(z) y W(z) es especialmente útil cuando se describe el sistema mediante una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes, esto es, si:

$$x[n]= - \sum_{k=1}^{p} a_k x[n-k] + \sum_{k=0}^{q} b_k w[n-k] \qquad (109)$$

En esta situación, calculando la transformada Z a ambos lados y aplicando la propiedad de desplazamiento temporal, se obtiene:

$$X(z)= - \sum_{k=1}^{p} a_k X(z)z^{-k} + \sum_{k=0}^{q} b_k W(z)z^{-k} \qquad (110)$$

$$X(z)\left(1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}\right) = W(z)\left(\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}\right) \qquad (111)$$

$$\frac{X(z)}{W(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} \qquad (112)$$

$$H(z)= \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} \qquad (113)$$

lo que evidencia un resultado tan importante como que un sistema LTI descrito por una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes posee una función de transferencia racional. Esta última expresión pone de manifiesto que existen clases de sistemas LTI causales básicos especialmente importantes.

Modelos de medias móviles, MA(q)

Si $a_k = 0$, $1 \le k \le p$ implica que:

$$H(z)=\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^q}\sum_{k=0}^{q} b_k z^{q-k} \qquad (114)$$

En este caso, H(z) contiene q ceros cuyos valores están determinados por los parámetros $\{b_k\}$ del sistema y q polos triviales en z=0, y se denomina sistema todos ceros. Obviamente, un sistema de estas características tiene una respuesta al impulso de duración finita (FIR, *finite impulse response*) y se denomina sistema FIR o sistema de media móvil (MA).

Modelos autorregresivos, AR(p)

En la segunda situación si $b_k=0$, $1\leq k\leq q$, la función de transferencia del sistema queda de la forma:

$$H(z)=\frac{b_0}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^p}{\sum_{k=0}^{p} a_k z^{p-k}} \qquad a_0=1 \qquad (115)$$

en cuyo caso la función de transferencia H(z) contiene p polos cuyos valores están determinados por los parámetros del sistema $\{a_k\}$ y un cero de orden p, trivial, en el origen z=0. Consecuentemente, H(z) sólo contiene polos no triviales y el sistema se denomina sólo polos, cuya presencia hace que la respuesta al impulso de este tipo de sistemas sea de duración infinita o sistema IIR (infinite impulse response), o sistema autorregresivo.

Modelos mixtos medias móviles-autorregresivos, ARMA(p,q)

En su forma general, H(z) contiene tanto polos como ceros y al sistema correspondiente se le denomina sistema polo-cero (ARMA). Es bien sabido que la función de transferencia de un modelo ARMA(p,q) en términos de los operadores de retardo se expresa como

$$\frac{1-\theta_1 L-\theta_2 L^2-\ldots-\theta_q L^q}{1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\ldots-\phi_p L^p} \qquad (116)$$

comparando esta expresión con la función de transferencia obtenida anteriormente

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} \qquad (117)$$

dentro del contexto de procesado digital de señales, resulta obvia la correspondencia entre ambos tipos de formulación: el orden de cada retardo coincide con la correspondiente potencia negativa de z. Así por ejemplo, si nos situamos en el caso particularmente sencillo de un modelo MA(1)

$$y_t=u_t-\theta_1 u_{t-1} \qquad (118)$$

o en forma equivalente

$$y_t=\theta_1(L)u_t \qquad (119)$$

siendo

$$\theta_1(L)=1-\theta_1 L \qquad (120)$$

en la notación seguida en el presente trabajo (124) se expresaría

$$y[n]=u[n]-\theta_1 u[n-1] \qquad (121)$$

Calculando en (125) la transformada Z y haciendo uso de su propiedad respecto al desplazamiento temporal se obtiene

$$Y(z)=U(z)(1-\theta_1 z^{-1}) \qquad (122)$$

con lo que

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=H(z)=1-\theta_1 z^{-1} \qquad (123)$$

resultando que

<u>**ámbito económico**</u>	<u>**procesado digital de señal**</u>
$\theta_1(L)=1-\theta_1 L$	$H(z)=1-\theta_1 z^{-1}$

Si se considera ahora un modelo ARMA (2,1):

$$y_t=\phi_1 y_{t-1}+\phi_2 y_{t-2}+u_t-\theta_1 u_{t-1} \qquad (124)$$

que en la notación utilizada se expresaría como

$$y[n]=\phi_1 y[n-1]+\phi_2 y[n-2]+u[n]-\theta_1 u[n-1] \qquad (125)$$

Calculando la transformada Z y haciendo uso de la propiedad de la misma respecto al desplazamiento temporal se obtiene:

$$Y(z) = \phi_1 Y(z)z^{-1}+\phi_2 Y(z)z^{-2}+U(z)-\theta_1 U(z)z^{-1} \qquad (126)$$

o de forma equivalente

$$Y(z)(1-\phi_1 z^{-1}-\phi_2 z^{-2})=U(z)(1-\theta_1 z^{-1}) \qquad (127)$$

con lo que la función de transferencia quedaría

$$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1-\theta_1 z^{-1}}{1-\phi_1 z^{-1}-\phi_2 z^{-2}} \tag{128}$$

Utilizando los operadores de retardo:

$$\phi_2(L)y_t=\theta_1(L)u_t \tag{129}$$

o de forma equivalente:

$$(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)y_t=(1-\theta_1 L)u_t \tag{130}$$

$$y_t=\frac{(1-\theta_1 L)}{(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)}u_t=\frac{\theta_1(L)}{\phi_2(L)}u_t \tag{131}$$

Resumiendo, para un modelo ARMA(2,1)

<u>**ámbito económico**</u>	<u>**procesado digital de señal**</u>
$\frac{(1-\theta_1 L)}{(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)}u_t=\frac{\theta_1(L)}{\phi_2(L)}u_t$	$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1-\theta_1 z^{-1}}{1-\phi_1 z^{-1}-\phi_2 z^{-2}}$

Estos dos simples ejemplos sirven para ilustrar el análisis comparativo entre las dos formulaciones.

III. Conclusiones

El presente trabajo se ha centrado en resaltar la relación existente entre el modelado de series temporales utilizado en Econometría y las técnicas habitualmente empleadas en el ámbito de la ingeniería denominado Procesado (o Tratamiento) Digital de Señales. Una serie temporal es completamente equivalente a una señal en tiempo discreto, es decir, a una serie de valores separados un intervalo temporal concreto… Esta relación permite utilizar el amplio cuerpo de doctrina y de técnicas existentes en el Tratamiento Digital de Señales para modelar, procesar, representar, predecir y en general extraer información de las series temporales que aparecen habitualmente en economía. Un claro ejemplo es el modelado de series temporales cortas, para predicción, problema importante en el ámbito económico y al que se pueden aplicar procedimientos bien conocidos dentro del Tratamiento Digital de Señales, como los métodos basados en la autoestructura de la matriz de autocorrelación de la señal (serie temporal).

Bibliografía

ANDERSON, T. W.,1971 "The Statistical Analysis of Time Series", Wiley-Interscience, 1971

FOUGERE, P., F., ZAWALICK, E., J., RADOSKI, H., R.1976, "Spontaneous Line Splitting in Maximum Entropy Power Spectrum Analysis", Phys. Earth Planet. Inter., vol. 12, Aug. 1976.

JENKIS, G., M., WATTS, D., G.,1968 "Spectral Analysis and Its Applications", Holden-Day, 1968.

S.M. KAY, S.L. MARPLE, Jr, "Spectrum Analysis- A Modern Perspective", Proc, IEEE, vol. 69, pp. 1380-1419, Nov. 1981.

MAKHOUL, J 1975., "Linear Prediction: A Tutorial Review", Proc. IEEE, vol. 63, nº. 4, Apr. 1975.

MARPLE Jr., S., L.1978, "Digital Spectral Analysis with Applications", Prentice-Hell, 1987.

PINTELON, R., SCHOUKENS, J.1999, "Time Series Analysis in the Frequency Domain", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 47, nº 1, Jun. 1999.