

Los caminos del pensamiento matemático

¿**Q**ué busca el matemático? La aventura matemática se puede concebir como un *intento de descubrir y dominar racionalmente las diversas estructuras que el mundo real presenta a la consideración de la mente humana*. Con el número dominamos la multiplicidad. Con la geometría dominamos el espacio. Y con la conjunción de ambos el hombre logró obtener hace varios miles de años, y en diversas culturas muy diferentes (mesopotámicas, célticas, precolombinas...), una serie de notables triunfos en su tarea de desentrañar uno de los mundos que más le fascinaron: el mundo de los astros. La simbiosis de astronomía y astrología, presente especialmente en los pueblos mesopotámicos, constituyó una fuerte motivación para esta *primera rama de la matemática aplicada*.

Miguel de Guzmán *

* Catedrático en la Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad Complutense. Madrid.

Matemáticas, la ciencia de la estructura

DESDE que el hombre se percató de que el universo se deja explorar y dominar por la razón matematizante, éste ha sido el patrón de desarrollo de la matemática. Alguien fija su mirada en ciertos aspectos complejos de la realidad y percibe modos de exploración conceptual y de manipulación simbólica hasta entonces inéditos que proporcionan un cierto dominio de tal realidad. Se ha creado el germen de una nueva teoría matemática.

Por mucho tiempo la matemática se definió como *la ciencia de la cantidad y la extensión*. Esta visión correspondía efectivamente a un estadio en que las estructuras abordadas matemáticamente eran las de la multiplicidad y el espacio antes mencionadas. En el siglo XVII el ambiente científico estaba preparado para abordar matemáticamente el estudio del cambio y de la cuantificación de la causalidad física. Newton y Leibniz crearon el instrumento para estudiar estas nuevas estructuras: *el cálculo infinitesimal*. El terreno estaba abonado gracias a la presencia previa del álgebra, de la idea de función y, desde el punto de vista físico, merced a la existencia de instrumentos de medida del tiempo, del espacio, y de otras magnitudes, mucho más adecuados que hasta entonces. Lo que nació entre confusión y brumas fue revelándose, a lo largo de los siglos posteriores hasta la actualidad, como el instrumento conceptual más poderoso para lograr el dominio efectivo de la realidad física.

La experiencia matemática: ciencia, arte y juego

EL matemático busca desvelar las estructuras profundas del mundo real y de otros muchos que su mente es capaz de imaginar. Pero en el camino encuentra un gran número de dádivas añadidas en las que tal vez no pensó en absoluto al emprenderlo. La matemática es, ciertamente, una ciencia, precisamente la primera históricamente en constituirse como tal. Es también una poderosa herramienta para penetrar en los secretos de la realidad, dominando lo más profundo de sus estructuras. Pero la matemática es, al mismo tiempo, una actividad

creadora de belleza, es decir es un arte, y por otra parte también participa muy intensamente de las características específicas de los juegos que los hombres cultivan para su propio placer.

Que la matemática sea arte y juego tal vez pueda sonar paradójico en los oídos de muchos, pero, mirando a la historia de las matemáticas y a la comunidad de matemáticos de cualquier época, creo firmemente que se puede afirmar que el sentido estético y el placer lúdico han sido dos de las componentes más fuertemente influyentes en el quehacer de los matemáticos. El matemático es, entre los científicos, quien más cerca se encuentra del artista.

¿En qué consiste la belleza de las matemáticas? Por una parte, en el *orden intelectual* que ante hechos aparentemente inconexos comienza a aparecer. Como un paisaje desde lo alto de una montaña que se va desvelando de la bruma que lo cubría. Todo el objeto contemplado aparece invadido de un sentido de unidad.

Otro elemento estético a menudo en la creación matemática consiste en la posibilidad de una *contemplación descansada e inmediata* de una verdad profunda, inesperada y llena de implicaciones. En realidad, el matemático no considera *haber entendido verdaderamente* un hecho matemático mientras no llega a poder hacerlo presente en su mente de esta forma inmediata, unitaria y descansada.

Otro tipo de goce matemático se produce como resultado de una ampliación de perspectivas con la que de una visión parcial se llega a la contemplación total de un objeto mucho más esplendoroso, en el que nuestra visión inicial queda englobada ocupando su lugar justo. Como el arqueólogo que va desvelando con paciencia las estructuras grandiosas de un templo primitivo sepultado en la tierra. Como ejemplo de este tipo de belleza matemática se puede citar la intensa aventura del espíritu humano, a través de muchos siglos de esfuerzo, para ir ampliando la idea de número, a medida que surgían nuevos retos de complejidad creciente en sus estructuras matemáticas. Desde el mero contar analógico, mediante muescas, del hombre primitivo hasta la refinada filigrana del número complejo conseguida en los comienzos del siglo XIX, el espíritu humano ha vivido una de sus más apasionantes aventuras intelectuales colectivas.

Por su parte el juego ha sido desde antiguo y sigue siendo en la actualidad un importantísimo motor de la actividad matemática. En el juego, entre los puentes de Koenigsberg, nació la topología por obra del matemático alemán Euler en el siglo XVIII.

En torno a las apuestas vino al mundo la teoría de la probabilidad en un intercambio de correspondencia entre los matemáticos franceses Pascal y Fermat en el siglo XVII. Y el pensamiento lúdico sigue siendo en la actualidad un fuerte estímulo para la creación de nuevas teorías matemáticas que, a corto o largo plazo, demuestran ser mucho menos superficiales y mucho más llenas de implicaciones profundas y de aplicaciones interesantes de lo que a primera vista uno podría estar tentado a juzgar.

La irrazonable efectividad del pensamiento matemático

¿QUÉ misterio es éste? El matemático observa unas cuantas estructuras del mundo real que se prestan, a través de una fuerte abstracción, es decir mediante una fuerte mutilación, a la manipulación conceptual y simbólica que es la matemática. Elabora después un mundo de ficción en gran parte guiado por su propio sentido estético. Y finalmente se encuentra, enorme sorpresa, con que la realidad concreta se adapta plenamente a sus elucubraciones mentales. Algo así como si, después de que un amigo me hubiera contado unos pocos detalles de la vida de otra persona, me dedicara a escribir una novela completa basada en ellos y me encontrara al final que la vida de esa persona coincide hasta en sus más mínimos detalles con los que en mi novela aparecen. Esta es la sensación que los científicos de todos los tiempos han experimentado, comenzando por los viejos pitagóricos que, maravillados por esta coincidencia del mundo real con el mundo mental que ellos creaban, no pudieron dejar de exclamar extasiados que *el universo entero es armonía y número*.

En nuestros días esta sensación ha sido certeramente expresada por E. P. Wigner, premio Nobel de Física: «El milagro de la adecuación de la matemática para la formulación de las leyes físicas es un don maravilloso que ni entendemos ni merecemos. Deberíamos mostrarnos agradecidos por él y esperar que seguirá siendo válido en la investigación futura y que se extenderá, para bien o para mal, para placer nuestro aunque también tal vez para nuestra perplejidad, a ramas más amplias del saber».

En la ciencia antigua y moderna, el campo de aplicación por antonomasia del pensamiento matemático fue durante mucho tiempo la ciencia

física. Hoy día sin embargo la matemática va penetrando todos los ámbitos de las ciencias, incluidas las ciencias sociales y humanas, como la economía, la psicología, la lingüística,... a medida que el matemático se ha ido enfrentando con el problema de la creación de nuevas herramientas que se adapten a las estructuras peculiares de tales ciencias. Nuestra medicina, por ejemplo, en sus modernos métodos de exploración no intrusiva hace un intenso uso de los resultados del análisis de Fourier, y en el estudio profundo de los problemas relativos al extraño equilibrio que reina en nuestro organismo entre orden y caos comienza a aprovecharse del desarrollo espectacular que en nuestros días está experimentando la teoría de los sistemas dinámicos.

El ordenador: ¿Una revolución científica?

LA aparición del telescopio trajo consigo una verdadera revolución científica. Esquemas enteros del pensamiento científico vigentes hasta el momento hubieron de ser reemplazados por otros nuevos. La invención, más tarde, del microscopio introdujo una remodelación parecida en otros campos. Telescopio y microscopio venían a perfeccionar tan sólo las herramientas de *observación* del hombre. La irrupción del ordenador en el siglo XX como *instrumento auxiliar del pensamiento humano* está introduciendo una revolución mucho más drástica y profunda, no sólo por los cambios más o menos superficiales que en nuestra forma de vivir se están operando, sino sobre todo por las transformaciones que comportan en lo que se refiere a lo más específico de nuestro ser humano, la capacidad de pensar. La superioridad para la observación del sistema hombre-microscopio sobre el hombre con sus ojos desnudos es ciertamente notable, pero probablemente resultará insignificante comparándola con la superioridad para ciertos aspectos importantes de la actividad mental del sistema hombre-ordenador sobre el hombre desprovisto de este instrumento, sobre todo cuando con el avance de la tecnología se logre una interacción mucho más cómoda y fluida entre el hombre y su máquina. Cuando en su futuro próximo el médico, por ejemplo, o bien el economista pueda incorporar a su dinamismo mental el sistema experto hábilmente programado de forma tan natural como ahora se cala sus gafas para tener una visión más nítida de los problemas con que se enfrenta, su capacidad de tomar una decisión acertada en la mayor parte de los casos será extraordinariamente superior a la actual.

En el mundo de las matemáticas el impacto profundo de la presencia del ordenador ya ha comenzado a hacerse notar. Desde hace más de un siglo los matemáticos han estado luchando con un problema-juego aparentemente superficial, *el problema de los cuatro colores*. ¿Cuántos colores son suficientes para colorear cualquier mapa plano adecuadamente? *Adecuadamente* quiere decir que dos países con un trozo de frontera común deben recibir distinto color. Los esfuerzos de los matemáticos de unas cuantas generaciones habían resultado infructuosos. Se sabía que cinco colores bastaban y que tres colores no eran suficientes. En 1976 dos matemáticos de la Universidad de Illinois, demostraron, mediante el uso inteligente del ordenador, que *cuatro colores bastan*. Hasta el momento no se conoce ninguna demostración que se pueda llevar a cabo por la mente humana *sin el apoyo del ordenador*. Para muchos esto representa un avance fundamental en el pensamiento matemático. Otros constatan no sin cierta nostalgia que este tipo de evidencia está muy lejos de ser tan satisfactoria como la de las matemáticas de siempre.

Lo que es cierto es que la presencia del ordenador está modificando la forma misma de construir las matemáticas. Con su capacidad de cálculo rápido, con su versatilidad para ayudar al cerebro humano en las operaciones lógicas, con el acercamiento visual y gráfico que es capaz de proporcionar a problemas enormemente intrincados, el ordenador actual, y mucho más el que se prevé en un futuro inmediato, va a ir haciendo evolucionar el panorama de la matemática de formas hasta ahora insospechadas.

Grandeza y miseria de la matemática

LA grandeza de la matemática se hace bien patente ante cualquiera que observe la historia de la ciencia y de la tecnología. Los logros obtenidos gracias al desarrollo de la matemática son de tal magnitud, y muy especialmente en nuestro siglo, que a veces nos pueden hacer olvidar las limitaciones profundas del pensamiento matemático que proviene, al igual que su potencia, de lo más hondo de su naturaleza. El éxito de la matemática se debe a que es una *mutilación de la realidad*, una abstracción. A través de ella dominamos ciertos aspectos de la realidad, pero no la realidad misma en su totalidad. Podemos sentir la

tentación de pensar que tenemos el pleno señorío de ella con nuestra construcción que, sin embargo, es potente en muchas ocasiones precisamente porque ha dejado fuera de consideración aspectos que pueden resultar enormemente importantes para el hombre como tal. Como decía en 1921 Ludwig Wittgenstein en su *Tractatus Logico-Philosophicus*: «Sentimos que incluso cuando todos los *posibles* problemas de las ciencias de la naturaleza hayan sido resueltos, nuestros problemas vitales no han sido tocados en absoluto. Por supuesto que entonces no queda ninguna pregunta ya; y precisamente ésta es la respuesta. La solución del problema de la vida se manifiesta con la desaparición de este problema. (¿No es éste el motivo por el que las personas a quienes el sentido de la vida, tras largas dudas, se les ha hecho claro, no pudieron decir en qué consistía este sentido?). Existe ciertamente lo inexpresable. Se *muestra*. Es lo místico».

Wittgenstein hablaba de este modo diez años antes de que apareciese demostrada bien palpablemente la limitación interna del pensamiento matemático a través del teorema de Goedel. En 1931 Kurt Goedel, otro matemático austriaco, demostró efectivamente que la esperanza, abrigada durante largo tiempo, de fundamentar sólidamente el edificio matemático mediante una demostración de que nunca aparecerían contradicciones en su tejido lógico, era un imposible. Tenemos que contentarnos con la confianza que nos proporciona la experiencia de veintiséis siglos de existencia de la matemática como ciencia. No es poco, ciertamente, pero esta situación coloca al matemático más cercano al carácter empírico de todos los otros científicos.

Viene bien percatarse de las limitaciones inherentes al pensamiento matemático a fin de contrarrestar las posibles aberraciones de una corriente hacia la exagerada matematización de nuestra cultura. La matemática es muy poderosa y muy útil en nuestro intento de obtener un cierto dominio de algunos aspectos de la naturaleza, pero conviene no olvidar que el ser humano es mucho más profundo que la más potente de las estructuras matemáticas que pueda imaginar.

Fácil de entender, difícil de resolver

CUANDO uno trata de imaginarse en qué podrán consistir los grandes problemas que se resisten a los esfuerzos de la comunidad matemática actual, con sus veintiséis siglos de intenso y

profundo desarrollo, parece obligado pensar en cuestiones enormemente intrincadas e incomprensibles para quien no se encuentre metido hasta los tuétanos en las técnicas más elaboradas de las ramas de máxima actualidad. Nada más lejos de la realidad. Existen preguntas a ras del suelo, que todo el mundo puede entender sin preparación alguna, y que después de muchos años, en algunos casos siglos, de trabajo concienzudo de un buen número de los matemáticos más capaces, aún no se sabe contestar. He aquí unas pocas de ellas:

La tira de sellos. Se tiene una tira longitudinal de sellos. ¿De cuántas formas diferentes se pueden doblar en un paquete de un sello en el frente?

Tubos tangentes. ¿Cuántos tubos iguales con forma de cilindro infinito de radio igual a un metro se pueden colocar en el espacio de modo que cada uno sea tangente a todos los otros? ¿Se pueden colocar 7? ¿Es 7 el número máximo?

Cruces de caminos. Se dan puntos en el plano. Cada uno se une a todos los demás por curvas continuas. ¿Cuál es el menor número X_n de intersecciones de estas curvas? Se sabe que $X_3 = 0$, $X_4 = 0$, $X_5 = 1$. Se conjetura que $X_6 = 3$, aunque nadie lo ha podido demostrar aún. Para un n más grande, ya no se sabe nada.

La conjetura de Fermat. Este problema fue considerado por vez primera por Pierre de Fermat, que fue jurista en el Parlamento de Toulouse al tiempo que logró convertirse, por pura afición, en uno de los más grandes matemáticos del siglo XVII. Al margen de una traducción al latín de un libro del matemático griego Diofanto, del siglo II, lo propuso de este modo: «Si n es un número natural mayor que 2, no existe ningún trío de números naturales x , y , z , tales que $x^n + y^n = z^n$. He encontrado una maravillosa demostración de este teorema, pero este margen es demasiado estrecho para incluirla».

La demostración de Fermat no apareció por ninguna parte. Al fin, este mismo año 1993, después de más de tres siglos de intenso trabajo de muchos matemáticos, Andrew Wiles ha podido encontrar lo que los expertos en el tema piensan que es una demostración de lo que ahora puede llamarse el teorema de Fermat-Wiles. Lo que resulta claro es que lo que Fermat pudo tener en la cabeza al enunciar su teorema en modo alguno se pareció a las complicadas ideas que están presente en la actual demostración del teorema.

Conjetura de Goldbach. Christian Goldbach, un médico amigo de Euler, el gran matemático del siglo XVIII, tenía una gran afición a observar los números. Observó que parece que cualquier número par mayor que 2 es suma de dos números primos. Así $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 7 + 3$, $12 = 7 + 5$, $14 = 11 + 3$, $16 = 13 + 3$, $18 = 13 + 5$, $20 = 13 + 7$,... Algunos pares son representables de varias formas diferentes como suma de dos primos. La conjetura de Goldbach, *todo número par mayor que 2 se puede representar como suma de dos números primos*, sigue desde entonces siendo una mera conjetura sin auténtica demostración, por más que los ordenadores la hayan corroborado experimentalmente hasta números de un inmenso orden de magnitud.

Podría alguno pensar que tales problemas resultan totalmente superficiales e irrelevantes con respecto a las grandes cuestiones de la física, biología, tecnología,... Como si fueran meros caprichos o juguetes de matemáticos ociosos que sólo pueden interesar a los miembros de este extraño club. Y sin embargo no sería difícil llenar todo un tratado mostrando cómo la solución de cuestiones aparentemente tan «irrelevantes» como las señaladas han proporcionado y siguen proporcionando claves decisivas en la solución de muchos problemas importantes de las otras ciencias y de la tecnología.

La enseñanza de la matemática, un reto para nuestra sociedad

EN 1917, en una importante conferencia *Sobre el bien* del gran matemático y filósofo Alfred North Whitehead, aparecía la siguiente afirmación: «Si la civilización continúa avanzando, en los próximos dos mil años la novedad predominante en el pensamiento humano será el señorío de la intelección matemática». Todos los indicadores del sentido del desarrollo de la cultura en el tiempo transcurrido desde entonces corroboran las palabras de Whitehead. La civilización humana, para bien o para mal, sigue un ritmo intensamente creciente de matematización.

Ante esta realidad es clara la responsabilidad de nuestra sociedad frente a la tarea de proporcionar a nuestros alumnos más jóvenes una efectiva y equitativa oportunidad de acceso a esta posibilidad de dominio sobre nuestro entorno físico y mental que constituye la capacitación para

la matemática. ¿Ejercemos correctamente esta responsabilidad? Claramente no del todo. La educación matemática, no ya a nivel nacional, sino a escala global, es una fuente de sufrimientos, frustraciones y desequilibrios, en forma de fracasos escolares que vienen a afectar más profundamente a aquellos individuos y grupos sociales que parten de una situación de desventaja económica y cultural.

La educación matemática es un importante problema que aún está por resolver y al que internacionalmente se está dedicando una fuerte atención. Los modelos adecuados a nuestra época para la transmisión de las actitudes, capacitaciones y conocimientos propios del espíritu matemático están aún por encontrar. La educación matemática está en período de transformación, después de haber experimentado una fuerte conmoción, con resultados nada satisfactorios, con la reforma hacia la llamada «matemática moderna».

La investigación en Educación Matemática realizada con seriedad y profundidad mediante la colaboración intensa de matemáticos, psicólogos e investigadores de los diversos aspectos de la educación durante los últimos 40 años va produciendo frutos apreciables. Hoy día parecen conocerse mejor algunos de los resortes que intervienen más activamente en el problema y se están gestando métodos que puedan contribuir más eficazmente a su resolución. Se puede decir que el rasgo común de tales métodos consiste en tratar de contagiar activamente al estudiante con el espíritu mismo que anima al matemático que se enfrenta ante la situación que desea dominar a través del peculiar modo de conceptualización que es la matemática. La enseñanza mediante el descubrimiento guiado por el maestro, la enseñanza a través de la resolución de problemas, que ponen el énfasis en los procesos de pensamiento, constituyen las formas más recomendadas hoy día para la transferencia de actitudes incluso en los niveles más elementales.

La gran dificultad para poner en práctica un método de enseñanza que implica los procesos de pensamiento y las actitudes profundas más bien que los contenidos estriba en la necesidad previa de que los mismos maestros y profesores estén imbuidos con tales actitudes y dominen esos procesos a fin de ser capaces de actuar con el firme convencimiento de que esto es lo más valioso que pueden transmitir a sus alumnos. La realidad es que una gran parte de los enseñantes de matemáticas no saben bien qué es hacer matemáticas, y esto sucede incluso entre aquellos que conocen decentemente los contenidos de la matemática. El proceso

aprendizaje-enseñanza es mucho más profundo que la mera transmisión de un contenido del conocimiento.

El educador matemático ideal debería conocer bien, por supuesto, la materia con la que se ha de ocupar, la cual no tiene por qué ser la que a él le han enseñado, ni en sus estudios elementales ni en los superiores. Por otra parte debe conocer a fondo a la persona que tiene delante, con toda su diferenciación individual. Además tendría que estar familiarizado con los modos que se revelan como más eficaces en este proceso, lo cual, si se quiere hacer con un mínimo de responsabilidad y conocimiento, no se improvisa en dos días. En este respecto constituye un peligroso espejismo pensar que para saber enseñar matemáticas basta con sabérselas bien. Los estudiantes que salen de nuestros centros superiores terminan con graves deficiencias en este respecto. Generalmente el modo de enseñanza que sus profesores utilizan es, por muy diversos motivos que van desde la masificación de los alumnos a la propia impreparación de los profesores universitarios para enseñar correctamente, el contraejemplo a evitar para otros niveles de enseñanza. Cualquier transformación de la enseñanza matemática que pretenda ser eficaz en cualquier nivel requiere necesariamente una reforma profunda y efectiva de los propios educadores.

La corriente actualmente propugnada internacionalmente por los especialistas de mayor prestigio en educación matemática consiste en proponerse como objetivo fundamental tratar de involucrar al alumno en el quehacer matemático mismo tal como se cultiva por la comunidad matemática, siempre adaptando esta actividad al nivel de desarrollo psicológico e intelectual de los estudiantes.

La rápida evolución de la matemática, por razón de su progreso interno y del posible aprovechamiento del desarrollo tecnológico, aconseja que el énfasis que en otros tiempos se ha colocado sobre los contenidos, se desplace para *subrayar los procesos propios del pensamiento matemático*, lo cual es practicable a todos los niveles de la enseñanza.